

3.1

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.
2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.
3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examineur.

REMARQUES SUR LA SIGNATURE D'UNE PERMUTATION

INTRODUCTION

La théorie des permutations est considérée par la plupart des débutants comme un sujet difficile. On y rencontre en effet des raisonnements d'un type assez différent de ceux auxquels ils ont été habitués dans leurs études antérieures. Il semble pourtant inévitable de l'enseigner dans un cours de première année d'Université, à cause des applications à la théorie des déterminants et à celle des polynômes symétriques.

Cette note est consacrée à un examen des diverses méthodes par lesquelles on peut introduire la signature d'une permutation. Nous avons nous-même expérimenté la plupart de ces méthodes, et discuté à plusieurs reprises de ces questions avec nos collègues J. L. Koszul et P. Gabriel. La comparaison des avantages et inconvénients des diverses méthodes s'appuie donc sur une expérience pédagogique réelle. Du point de vue mathématique, la seule nouveauté est la définition de la signature d'une permutation présentée au n° 4.

1. *Permutations paires et impaires.*

Rappelons les faits connus. Notons n un entier strictement positif et X l'ensemble des entiers $1, 2, \dots, n$. Une *permutation* (de rang n) est une bijection s de X sur X , c'est-à-dire une application de X dans X telle que tout élément de X soit le transformé d'un élément et d'un seul. Si s et t sont deux permutations, leur produit st est l'application qui à i fait correspondre $s(t(i))$. La permutation identique ε associe chaque élément de X à lui-même. Enfin, si s est une permutation, la permutation inverse s^{-1} est telle que l'on ait $s^{-1}(i) = j$ si et seulement si $s(j) = i$. Avec cette définition du produit, de l'unité et de l'inverse, les permutations forment un groupe S_n .

Nous supposons connue la définition de la *transposition* s_{ij} échangeant i et j , et le fait que toute permutation est produit de transpositions; en fait, nous utiliserons plusieurs fois le fait que toute permutation est produit d'une suite finie de transpositions de la forme $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ avec $\pi_i = s_{i, i+1}$.

Appelons permutation *paire* toute permutation qui est produit d'un nombre pair de transpositions, et notons S_n^+ leur ensemble; définissons de manière analogue l'ensemble S_n^- des permutations impaires. Ces définitions entraînent immédiatement les propriétés suivantes:

- a) On a $S_n = S_n^+ \cup S_n^-$; autrement dit, toute permutation est paire ou impaire.
- b) Il existe des permutations paires, par exemple ε , et des permutations impaires, par exemple les transpositions.
- c) « Règle des signes »: le produit de deux permutations de même parité est pair, le produit de deux permutations de parité distincte est impair. De plus, toute permutation a même parité que son inverse.

A priori, rien n'exclut qu'une permutation puisse être à la fois paire et impaire. Examinons les deux possibilités:

A) Il n'existe aucune permutation à la fois paire et impaire. Alors les ensembles non vides S_n^+ et S_n^- forment une *partition* de S_n . On peut définir la *signature* d'une permutation s comme le nombre $\text{sgn } s$ égal à 1 si s est paire et à -1 si s est impaire. La règle des signes se traduit alors en formule:

$$(1) \quad \text{sgn } st = (\text{sgn } s) \cdot (\text{sgn } t),$$

et par définition, on a

$$(2) \quad \text{sgn } s_{ij} = -1.$$

B) Il existe une permutation qui est à la fois paire et impaire. Si a est une telle permutation, la règle des signes montre que a^{-1} est impaire, donc que $\varepsilon = aa^{-1}$ est impaire. Une nouvelle application de la règle des signes montre que pour toute permutation s paire (impaire), alors $s = \varepsilon s$ est impaire (paire). Autrement dit, toute permutation est paire et impaire, et l'on a $S_n^+ = S_n^- = S_n$.

De manière plus succincte, on peut dire ceci: le groupe S_n est engendré par les transpositions, qui sont des éléments d'ordre 2; l'ensemble S_n^+ des permutations paires est le sous-groupe de S_n engendré par les produits de deux transpositions, et S_n^- est de la forme $S_n^+ t$; on a donc $S_n = S_n^+ \cup S_n^+ t$, et par suite, ou bien S_n^+ est d'indice 2 dans S_n et S_n^- est la classe modulo S_n^+ qui ne contient pas ε , ou bien S_n^+ est d'indice 1 dans S_n , auquel cas on a $S_n = S_n^+ = S_n^-$.

2. Relations entre transpositions.

Un résultat fondamental de la théorie des permutations est que le cas B) ne peut se présenter. Nous allons d'abord esquisser une démonstration directe, mais laborieuse. Nous avons déjà rappelé que le groupe S_n est engendré par $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$; de plus, on établit facilement les relations suivantes entre ces transpositions

$$(3_a) \quad \pi_i^2 = \varepsilon \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1$$

$$(3_b) \quad (\pi_i \pi_{i+1})^3 = \varepsilon \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2$$

$$(3_c) \quad (\pi_i \pi_j)^2 = \varepsilon \quad \text{lorsque } |i-j| \geq 2.$$

Compte tenu de $\pi_i^2 = \varepsilon$, on peut écrire (3_b) et (3_c) sous la forme suivante qui est plus avantageuse

$$(3'_b) \quad \pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2$$

$$(3'_c) \quad \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i \quad \text{lorsque } |i-j| \geq 2.$$

L'existence de ces relations permet la transformation des produits de transpositions π_i . Dans un produit de telles transpositions, on peut, sans en changer la valeur, effectuer les opérations suivantes:

- a) supprimer deux termes égaux qui se suivent, ou au contraire insérer deux nouveaux termes consécutifs égaux;
- b) remplacer un produit partiel du type $\pi_i \pi_{i+1} \pi_i$ par $\pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1}$ sans toucher aux autres termes (les trois termes modifiés doivent être consécutifs);
- c) déplacer un terme π_i vers la gauche ou la droite, pourvu qu'il n'ait pas à sauter par-dessus π_{i-1} ou π_{i+1} .

Un théorème classique, dû à Moore (1897), affirme que les relations (3_a) , $(3'_b)$ et $(3'_c)$ suffisent à engendrer toutes les relations entre $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ dans S_n (cf. Burnside, [3], note C). Cela signifie que si les produits de deux suites de π_i représentent la même permutation, on passe de l'un à l'autre par une suite de transformations des types a), b) et c).

Illustrons ceci par un exemple. Nous considérons les deux produits

$$A = \pi_2 \pi_1 \pi_3 \pi_6 \pi_2 \pi_3 \pi_1 \pi_6 \pi_3 \pi_4 \pi_3 \pi_6 \pi_5 \pi_4 \pi_7$$

$$B = \pi_6 \pi_7 \pi_3 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$$

dans le groupe S_8 . L'évaluation de ces produits est faite dans les deux tableaux suivants et obéit aux règles usuelles: le produit est effectué de la

droite vers la gauche, une opération π_i fait passer d'une ligne à la suivante en échangeant les nombres i et $i+1$ (mais non pas les termes de rang i et $i+1$).

	Calcul de A		Calcul de B
	1 2 3 4 5 6 7 8	π_4	1 2 3 4 5 6 7 8
π_7	1 2 3 4 5 6 8 7	π_3	1 2 3 5 4 6 7 8
π_4	1 2 3 5 4 6 8 7	π_2	1 2 4 5 3 6 7 8
π_5	1 2 3 6 4 5 8 7	π_1	1 3 4 5 2 6 7 8
π_6	1 2 3 7 4 5 8 6	π_5	2 3 4 5 1 6 7 8
π_3	1 2 4 7 3 5 8 6	π_4	2 3 4 6 1 5 7 8
π_4	1 2 5 7 3 4 8 6	π_3	2 3 5 6 1 4 7 8
π_3	1 2 5 7 4 3 8 6	π_2	2 4 5 6 1 3 7 8
π_6	1 2 5 6 4 3 8 7	π_3	3 4 5 6 1 2 7 8
π_1	2 1 5 6 4 3 8 7	π_7	4 3 5 6 1 2 7 8
π_3	2 1 5 6 3 4 8 7	π_6	4 3 5 6 1 2 8 7
π_2	3 1 5 6 2 4 8 7		4 3 5 7 1 2 8 6
π_6	3 1 5 7 2 4 8 6		
π_3	4 1 5 7 2 3 8 6		
π_1	4 2 5 7 1 3 8 6		
π_2	4 3 5 7 1 2 8 6		

On voit donc que A et B sont tous deux égaux à la permutation $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{smallmatrix})$. Nous indiquons maintenant par un tableau une suite de transformations faisant passer de A à B; nous avons omis d'inscrire les π dans les produits, en ne gardant que les indices.

Règle

A = 2 1 3 6 2 3 1 <u>6 3</u> 4 3 6 5 4 7	
2 1 3 6 2 3 1 <u>3 6</u> 4 3 6 5 4 7	c
2 1 3 6 2 3 <u>3 3</u> 1 6 4 3 6 5 4 7	c
2 1 3 6 2 1 6 <u>4 3</u> 6 5 4 7	a
2 1 3 6 2 1 6 <u>4 6</u> 3 5 4 7	c
2 1 3 6 2 1 <u>6 6</u> 4 3 5 4 7	c
	a

$$\begin{array}{lcl}
 \overline{2\ 1\ 3\ 6}\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4\ 7 & c & \\
 \overline{2\ 1\ 6\ 3}\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4\ 7 & c & \text{Migration de 6 vers la gauche} \\
 \overline{2\ 6\ 1\ 3}\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4\ 7 & c & \\
 6\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ \overline{4\ 7} & c & \\
 6\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 4\ 3\ \overline{5\ 7}\ 4 & c & \\
 6\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 4\ 3\ \overline{7\ 5}\ 4 & c & \\
 6\ 2\ 1\ 3\ 2\ 1\ \overline{4\ 7}\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 2\ 1\ 3\ 2\ \overline{1\ 7}\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \text{Migration de 7 vers la gauche} \\
 6\ 2\ 1\ 3\ 2\ \overline{7\ 1}\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 2\ 1\ \overline{3\ 7}\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 2\ \overline{1\ 7}\ 3\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 \overline{6\ 2\ 7}\ 1\ 3\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 7\ 2\ \overline{1\ 3}\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 \\
 6\ 7\ 2\ 3\ \overline{1\ 2}\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 7\ \overline{2\ 3}\ 2\ 1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 7\ 3\ 2\ 3\ \overline{1\ 2}\ 4\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 7\ 3\ 2\ 3\ \overline{1\ 4}\ 2\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 7\ 3\ 2\ 3\ 4\ \overline{1\ 2}\ 3\ 5\ 4 & c & \\
 6\ 7\ 3\ 2\ 3\ 4\ \overline{1\ 2}\ 5\ 3\ 4 & c & \\
 6\ 7\ 3\ 2\ 3\ 4\ \overline{1\ 5}\ 2\ 3\ 4 & c & \text{Migration de 5 vers la gauche} \\
 B = 6\ 7\ 3\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4 & c &
 \end{array}$$

Montrons comment le théorème de Moore entraîne le résultat cherché sur la parité. Tout d'abord, la relation $s_{ij} = \pi_i s_{i+1,j} \pi_i$ (pour $i \leq j-2$) entraîne par récurrence la formule

$$(4) \quad s_{ij} = \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-2} \pi_{j-1} \pi_{j-2} \dots \pi_{i+1} \pi_i \quad (\text{pour } i < j).$$

Par suite, toute transposition est produit d'un nombre impair de générateurs π_i , et l'on peut définir les permutations paires (impaires) comme les produits d'un nombre pair (impair) de générateurs π_i . Or, une transformation de type a) appliquée à un produit de π_i augmente ou diminue de deux le nombre des facteurs, alors que ce nombre de facteurs est inchangé par les transformations de type b) ou c). Une application des transformations de type a), b) ou c) ne peut donc modifier la parité du nombre des facteurs; le théorème de Moore montre alors qu'un produit d'un nombre pair de π_i ne peut être égal à un produit d'un nombre impair de tels facteurs, donc qu'une permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

3. Nombre d'inversions d'une permutation.

La démonstration du théorème de Moore est un peu délicate pour avoir sa place dans un cours élémentaire. L'intérêt de ce théorème est ailleurs; il n'est en effet que le prototype de résultats s'appliquant à une vaste classe de groupes, les groupes de Coxeter, dont on rencontre de nombreuses applications géométriques. On peut consulter à ce sujet les monographies de Coxeter et Moser [5] et de Bourbaki [2].

Les méthodes que nous allons maintenant examiner ont toutes un point commun. Par un procédé ou un autre, on associe à toute permutation s un nombre $\alpha(s)$ égal à 1 ou -1 de telle sorte que l'on ait la relation

$$(5) \quad \alpha(st) = \alpha(s) \alpha(t)$$

pour deux permutations s et t . Il suffit alors de prouver que $\alpha(s)$ est égal à -1 pour une transposition s , ou même simplement de prouver la formule $\alpha(\pi_i) = -1$ pour $1 \leq i < n$; on en déduit en effet que $\alpha(s)$ est égal à 1 pour les permutations paires et à -1 pour les permutations impaires. On a ainsi distingué entre les deux espèces de permutations et indiqué un procédé de construction de la signature.

Un premier groupe de méthodes tourne autour de l'idée d'*inversion* d'une permutation. Rappelons quelques définitions: si $x_1, \dots, x_n$ est une suite de n nombres réels distincts, une inversion de la suite est un couple extrait de la suite en question qui se trouve dérangé de l'ordre usuel; autrement dit, c'est un couple $x_i x_j$ avec $i < j$ et $x_i > x_j$. Ainsi, dans la suite 6 3 1 2 4 5, les inversions sont les couples

$$6\ 3, 6\ 1, 6\ 2, 6\ 4, 6\ 5, 3\ 1, 3\ 2.$$

Si s est une permutation, on note $N(s)$ le nombre d'inversions de la suite $s(1), \dots, s(n)$; dans ce n^0 , on pose $\alpha(s) = (-1)^{N(s)}$.

A) La méthode la plus classique consiste à comparer $N(s)$ et $N(t)$ pour $t = s\pi_i$. La suite $t(1), \dots, t(n)$ ne diffère de la suite $s(1), \dots, s(n)$ que par l'échange des termes de rang i et $i+1$. Les couples que l'on peut extraire de la suite $t(1), \dots, t(n)$ sont donc les mêmes que ceux que l'on peut extraire de la suite $s(1), \dots, s(n)$, à l'exception de $s(i), s(i+1)$ qui est remplacé par $s(i+1), s(i)$. En passant de s à t , le nombre d'inversions est augmenté ou diminué d'une unité selon que l'on a $s(i) < s(i+1)$ ou $s(i) > s(i+1)$. En tout cas, on a $\alpha(s\pi_i) = -\alpha(s)$. Comme le nombre d'inversions de la permutation identique ε est nul, on en déduit par récurrence sur k la formule $\alpha(s) = (-1)^k$ si s est produit de k générateurs π_i . Par suite, $\alpha(s)$ vaut 1 pour les permutations paires et -1 pour les permutations impaires (¹).

B) On peut aussi considérer des fonctions de n variables $f(x_1, \dots, x_n)$; la nature de ces variables est indifférente, il peut s'agir de nombres entiers, réels ou complexes, et l'on peut aussi considérer des polynômes formels à n indéterminées. Une permutation s de rang n transforme f en une nouvelle fonction sf par la règle

$$(6) \quad (sf)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}).$$

La suite du raisonnement repose sur la formule

$$(7) \quad (st)f = s(tf)$$

où s et t sont deux permutations de rang n et f une fonction de n variables.

On introduit ensuite une fonction particulière D définie par

$$(8) \quad D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k < l} (x_k - x_l)$$

Pour passer de D à $\pi_i D$, il faut échanger x_i et x_{i+1} donc, remplacer $x_i - x_{i+1}$ par $x_{i+1} - x_i$, échanger les facteurs de la forme $x_k - x_i$ et $x_k - x_{i+1}$ pour $1 \leq k < i$, et échanger les facteurs de la forme $x_i - x_l$ et $x_{i+1} - x_l$ pour $i+1 < l$; au total, on a $\pi_i D = -D$. Si s est le produit de k générateurs π_i , la formule (7) montre alors que l'on a $sD = (-1)^k D$; autrement dit, on a $sD = D$ si s est paire et $sD = -D$ si s est impaire. Comme la fonction D n'est pas identiquement nulle, une même permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

Le raisonnement précédent a été présenté sans faire jouer de rôle explicite aux inversions. En fait, par un argument du même type, mais un

¹) Une variante consiste à comparer $N(s)$ et $N(ss_{ij})$ pour une transposition s_{ij} quelconque. Le principe est analogue, mais l'énumération des inversions de ss_{ij} est un peu plus compliquée.

peu plus délicat, on montre que dans le passage de D à sD , il y a permutation des facteurs et $N(s)$ changements de signe, d'où $sD = (-1)^{N(s)} D$.

C) Dans la méthode précédente, tant les variables $x_1, \dots, x_n$ que les fonctions f jouent un rôle assez fictif. On peut en présenter une variante plus « économique » de la manière suivante. A chaque permutation s de rang n , on associe l'entier $\Pi(s) = \prod_{i < j} (s(j) - s(i))$. On remarque ensuite que, la permutation s étant fixée, toute partie à deux éléments de l'ensemble $X = \{1, 2, \dots, n\}$ se représente de manière unique sous la forme $\{s(i), s(j)\}$ avec $i < j$; de plus, $|k - l|$ ne dépend évidemment que de la partie $\{k, l\}$. Par suite $|\Pi(s)| = \prod_{i < j} |s(i) - s(j)|$ est égal à $\prod_{\{k, l\}} |k - l| = \prod_{k < l} (l - k) = D$. De plus, dans le produit définissant $\Pi(s)$, les facteurs négatifs correspondent exactement aux inversions de la suite $s(1), \dots, s(n)$. On en conclut

$$(9) \quad \Pi(s) = \alpha(s) \cdot D.$$

On considère ensuite deux permutations s et t . Dans le produit

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{i < j} \frac{s(t(j)) - s(t(i))}{t(j) - t(i)},$$

chaque facteur est invariant par l'échange de i et j , et ne dépend donc que de la partie $\{t(i), t(j)\}$. On a donc

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{\{k, l\}} \frac{s(l) - s(k)}{l - k} = \prod_{k < l} \frac{s(l) - s(k)}{l - k} = \frac{\Pi(s)}{D} = \alpha(s),$$

c'est-à-dire

$$(10) \quad \Pi(st) = \alpha(s) \Pi(t).$$

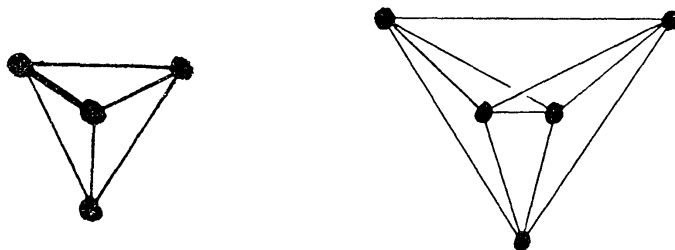
De (9) et (10), on déduit $\alpha(st) \cdot D = \Pi(st) = \alpha(s) \cdot \Pi(t) = \alpha(s) \alpha(t) \cdot D$, d'où $\alpha(st) = \alpha(s) \alpha(t)$ puisque D est non nul. On prouve ensuite que le nombre d'inversions de π_i est égal à 1, d'où $\alpha(\pi_i) = -1$. Comme on l'a déjà remarqué, cela suffit à montrer qu'une permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

4. Permutations et graphes.

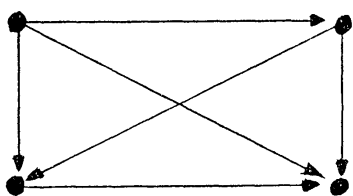
Comme J. L. Koszul me l'a fait plusieurs fois remarquer, l'inconvénient de la définition de la signature au moyen du nombre d'inversions est de dépendre étroitement de la relation d'ordre entre entiers; de même, les transpositions π_i de deux entiers consécutifs jouent un rôle privilégié dans les

démonstrations précédentes. Or, on a souvent besoin d'utiliser les permutations d'un ensemble fini X non numéroté à l'avance. Pour pouvoir définir le nombre d'inversions d'une permutation s de X , il faut choisir une énumération de X , ou ce qui revient au même une relation d'ordre total sur X . Le nombre d'inversions $N(s)$ dépend de ce choix, mais comme on le constate *a posteriori*, la parité de $N(s)$ a un caractère intrinsèque.

Pour répondre à cette objection, on peut présenter l'élaboration suivante de la méthode des inversions; l'idée en est qu'il suffit d'orienter les parties à deux éléments pour définir les inversions. Nous adoptons un mode d'exposition fondé sur la notion de *graphe*. Soit donc X un ensemble fini à n éléments, que nous représentons par des points d'un plan appelés *sommets*. Deux sommets distincts sont joints par un *arc*, comme dans les deux figures suivantes, qui correspondent aux cas $n = 4$ et $n = 5$.



La figure ainsi obtenue s'appelle d'ordinaire le *graphe complet* à n sommets. Orienter un tel graphe consiste à choisir sur chaque arc un sens de parcours, représenté par une flèche dans l'exemple suivant :



Les arcs du graphe correspondent aux *parties* à deux éléments de X et orienter le graphe consiste à choisir dans chaque partie à deux éléments un premier et un deuxième élément. Il revient au même de dire qu'une *orientation* est un ensemble o de couples ordonnés (i, j) formés

d'éléments distincts de X , tel que l'on ait, soit $(i, j) \in o$, soit $(j, i) \in o$ pour deux éléments distincts i et j de X . Une permutation s de X transforme l'orientation o en une nouvelle orientation so qui se compose des couples $(s(i), s(j))$ avec (i, j) dans o . De manière intuitive, s définit un réarrangement des sommets du graphe qui entraîne un réarrangement des arcs, et l'on transporte avec chaque arc son orientation.

Soient o et o' deux orientations; soit m le nombre des arcs qui ont des orientations distinctes par rapport à o et o' , c'est-à-dire le nombre des

couples qui appartiennent à o' , mais non à o ; on pose $d(o, o') = (-1)^m$. Le formulaire suivant s'établit par des raisonnements élémentaires ⁽²⁾

$$(11) \quad d(o, o) = 1$$

$$(12) \quad d(o, o') = d(o', o)$$

$$(13) \quad d(o, o') d(o', o'') = d(o, o'')$$

$$(14) \quad d(so, so') = d(o, o').$$

On peut alors prouver que $d(o, so)$ est indépendant de l'orientation o choisie; en effet, si o et o' sont deux orientations, on a

$$\begin{aligned} d(o', so') &= d(o', o) d(o, so) d(so, so') && \text{d'après (13)} \\ &= d(o, o') d(o, so) d(o, o') && \text{d'après (12) et (14)} \\ &= d(o, so) && \text{car } d(o, o')^2 = 1. \end{aligned}$$

A toute permutation s de X , on fait correspondre alors le nombre $\alpha(s)$ qui est égal à $d(o, so)$ pour toute orientation o . Si s et t sont deux permutations, on a

$$\alpha(st) = d(o, sto) = d(o, to) d(to, s(to)) = \alpha(t) \alpha(s).$$

Pour calculer $\alpha(s_{ab})$, nous choisissons une orientation o convenable; on oriente l'arc ab de a vers b , chaque arc ax de a vers x , chaque arc bx de b vers x et les autres arcs de manière arbitraire. Le seul effet de la transposition s_{ab} est de changer l'orientation de l'arc ab , d'où $\alpha(s_{ab}) = -1$.

On peut donc définir la signature de s comme le nombre $\alpha(s)$. Supposons en particulier que X soit l'ensemble des entiers $1, 2, \dots, n$ et prenons pour o l'ensemble des couples (i, j) avec $i < j$; alors so se compose des couples de la forme $(s(i), s(j))$ avec $i < j$; les éléments de so qui n'appartiennent pas à o sont donc les couples $(s(i), s(j))$ avec $i < j$ et $s(i) > s(j)$ et leur nombre est égal à $N(s)$. On retrouve donc la définition de la signature comme égale à $(-1)^{N(s)}$.

5. Autres méthodes.

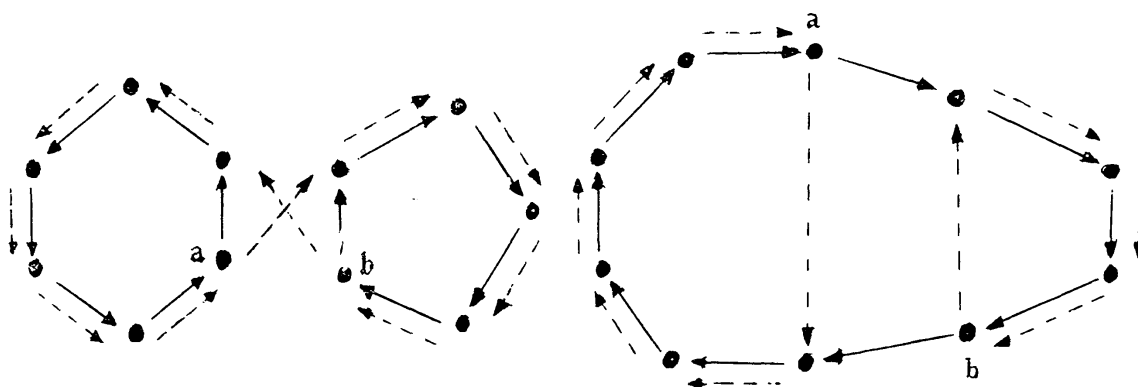
On peut aussi utiliser les *cycles* d'une permutation pour définir sa signature ([6], chap. 8). Soit $c(s)$ le nombre de cycles de la permutation s de rang n ; les définitions usuelles de la signature permettent de prouver qu'elle

est égale à $z(s) = (-1)^{n+c(s)}$. Si l'on veut *définir* la signature de s par le nombre $z(s)$, il faut établir *a priori* la relation

$$(15) \quad c(ss_{ab}) = c(s) \pm 1.$$

En effet, cette relation entraîne $z(ss_{ab}) = -z(s)$; mais on a $c(\varepsilon) = n$, d'où $z(\varepsilon) = 1$ et il est alors immédiat que $z(s)$ est égal à 1 ou à -1 selon que s est paire ou impaire.

Pour établir la formule (15), il faut distinguer deux cas. Si a et b appartiennent à deux cycles distincts de s , ces deux cycles se regroupent en un seul cycle de ss_{ab} . Si au contraire, a et b appartiennent au même cycle de s , ce cycle se scinde en deux cycles de ss_{ab} . En tout état de cause, les cycles de s qui ne contiennent ni a ni b sont des cycles pour ss_{ab} . Les deux figures suivantes nous dispenseront de faire un raisonnement plus explicite ⁽³⁾.



Une dernière manière de procéder consiste à éviter le problème. Dans un cours élémentaire, la principale utilité de la signature d'une permutation est de permettre la définition du déterminant d'une matrice. Or, on peut définir directement les déterminants par récurrence sur leur ordre, en procédant par exemple par développement selon les éléments de la première colonne. Il n'est pas trop difficile de développer toute la théorie des déterminants à partir de cette définition, sans utiliser une seule fois les permutations. Une fois ceci fait, on définit la signature d'une permutation comme le déterminant de la matrice de permutation correspondante. La règle de

³⁾ On peut aussi montrer que la signature d'une permutation s est égale à $(-1)^{c'(s)}$ où $c'(s)$ est le nombre des cycles de longueur paire de s . Si l'on prend ceci comme définition de la signature, il faut montrer que $c'(ss_{ab})$ a une parité différente de celle de $c'(s)$. Les raisonnements sont analogues, mais il faut y ajouter quelques considérations de parité qui les rendent moins immédiatement évidents.

multiplication pour les déterminants redonne alors la règle de multiplication des signatures pour les permutations. Cette méthode nous a été signalée par P. Gabriel, qui l'a utilisée plusieurs fois dans ses cours.

6. *Considérations pédagogiques.*

Les méthodes fondées sur le nombre d'inversions (ou la variante proposée au n° 4) reposent sur la distinction entre un *ensemble* à deux éléments et un *couple*; cette distinction est capitale, mais assez délicate à saisir pour des débutants. Ces méthodes utilisent aussi la notion de réarrangement des termes d'un produit sous une forme assez subtile. Elles comportent enfin un aspect combinatoire important dans l'énumération des inversions. On connaît bien les difficultés d'exposition des théories combinatoires; si l'on peut se faire une idée assez nette des mécanismes en jeu sur un exemple bien explicité, il est difficile de formuler des raisonnements généraux et en particulier de s'assurer du caractère exhaustif de l'énumération des cas. Il y faut une imagination assez particulière qui ne se développe qu'à l'usage. Ces raisons expliquent la peine qu'éprouvent les débutants à suivre de tels raisonnements.

On peut aussi juger les méthodes précédentes sur leur économie de moyens. De ce point de vue, la méthode C) du n° 3 introduit le minimum de notions étrangères, mais sa sobriété la rend assez difficile à suivre. Bourbaki l'expose de manière concise dans [1], page 99; il emploie la notation trop suggestive $\pi(V_n)$ pour $\Pi(\pi)$, ce qui a induit en erreur certains de ceux qui l'ont recopié [7, page 153]. Parmi les notions étrangères que nous avons introduites, celle de permutation des variables dans une fonction se retrouvera inévitablement dans l'étude des polynômes symétriques; celle de graphe me semble devoir être présentée le plus tôt possible aux étudiants, mais l'expérience m'a montré que la démonstration du n° 4 nécessitait beaucoup d'explications pour être comprise. Enfin, la notion de cycle d'une permutation me semble avoir sa place, même dans un cours introductif.

Toutes ces raisons nous font préférer la méthode de permutation des variables (cf. n° 3, B)) et celle des cycles à toutes les autres.