

2.4

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.
2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

Remarque particulière :

Soit E un ensemble. On dit que E est un espace métrique s'il est muni d'une distance, c'est-à-dire d'une application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\forall x, y, z \in E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

On peut alors définir une topologie sur E (boules ouvertes, boules fermées, parties ouvertes, notion de convergence de suites, ...) comme on le fait dans le cas de la distance sur un espace vectoriel normé.

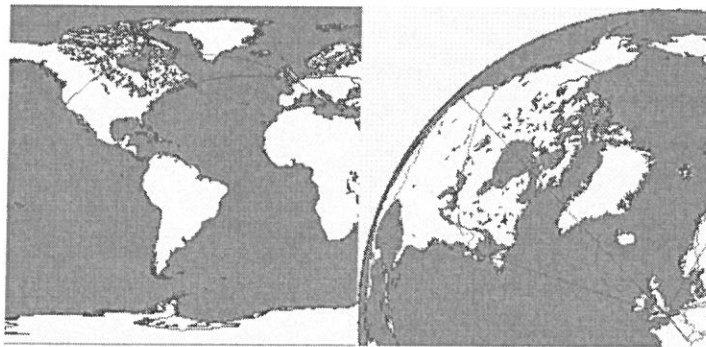
VII. GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Le sujet du jour est la géométrie de la sphère. Même si nous savons que ce modèle ne forme pas un plan de Hilbert, c'est une géométrie importante puisque le monde dans lequel nous vivons est sphérique (à quelques bosses et trous près). Nous nous intéressons donc à la notion de droite, d'angle, de distance et d'aire. De plus, il existe un moyen de créer une géométrie d'incidence à partir de la géométrie sphérique.

1. LES DROITES ET LA DISTANCE SPHÉRIQUE

On travaillera avec une sphère Σ de centre C , de rayon r (dans $\mathbb{R}^3$ disons). Un *grand cercle* est l'intersection avec Σ d'un plan passant par le centre C . Ainsi, étant donné deux points distincts A et B de la sphère, il existe un grand cercle passant par A et B : l'intersection de Σ avec le plan passant par A , B et C . Celui-ci est unique si A et B ne sont pas antipodaux. S'ils le sont, il y a une infinité de grand cercles passant par A et B .

Exemple 1.1. Tous les méridiens sont des demi-grands cercles passant par les pôles nord et sud. Voici encore des arcs de grand cercles sur notre planète, reliant l'Europe à l'Amérique du Nord :



Si A et B ne sont pas antipodaux, il existe exactement deux *arcs de grand cercle* d'extrémités A et B partageant le grand cercle passant par A et B en deux. On choisit d'habitude le plus petit des deux. L'intersection d'un plan arbitraire avec Σ est un cercle (ou un point, ou l'ensemble vide) puisque tout plan est parallèle à un plan passant par

C . Choisissons un repère centré en C rendant ce plan horizontal et constatons que notre plan original coupe la sphère en un parallèle :



Proposition 1.2. *De tous les arcs de cercle reliant A à B , c'est l'arc de grand cercle qui réalise la distance la plus courte.*

Démonstration. Le rayon des grands cercles est r , alors que tous les autres cercles sur la sphère ont un rayon inférieur et donc sont plus courbés. |

De fait les arcs de grand cercle sont des *géodésiques*, c'est-à-dire que ce sont les courbes réalisant le chemin le plus court pour se rendre d'un point de la sphère à un autre. Dans le plan le trajet le plus court entre deux points est réalisé par un segment de droite. Les grands cercles jouent donc le rôle des droites dans la géométrie sphérique. De plus la sphère est un espace métrique. Quelle est la distance entre deux points A et B ? Si α est l'angle au centre de la sphère, exprimé en radians, c'est tout simplement $r\alpha$.

Proposition 1.3. *Deux grands cercles distincts se coupent en exactement deux points antipodaux.*

Démonstration. Deux plans passant par C se coupent en une droite passant par C . Celle-ci coupe la sphère en deux points antipodaux d'un diamètre de Σ . |

Il n'y a donc pas de notion de parallélisme sur la sphère. De plus deux "droites" sécantes se coupent en deux points, ce qui contredit les axiomes d'incidence. Nous sommes donc bien loin d'une géométrie euclidienne, même hilbertienne!

2. ISOMÉTRIES DE LA SPHÈRE

Nous venons de voir que la distance sur la sphère est mesurée par l'angle au centre. Une application $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est une *isométrie* si elle préserve les distances. Les isométries sont en particulier des bijections (pourquoi?).

Proposition 2.1. *Si la sphère Σ de rayon r est centrée à l'origine, alors chaque isométrie $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est de la forme $\varphi(\vec{c}) = A\vec{c}$, où $A \in O(3)$ est une matrice orthogonale.*

Démonstration. |

Exemple 2.2. Soit N et S deux points antipodaux de Σ . Alors la rotation d'angle α et d'axe NS est une application $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui envoie tout point de Σ sur un point de Σ . La restriction $\rho|_{\Sigma}$ est alors une isométrie de la sphère.

L'application *antipodale* $a : \Sigma \rightarrow \Sigma$ envoie tout point (x, y, z) sur son antipodal $(-x, -y, -z)$.

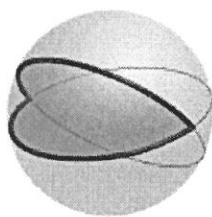
Certains sous-groupes finis de $SO(3)$ jouent un rôle important dans l'étude des polyèdres réguliers puisqu'ils décrivent les rotations qui laissent globalement invariant les sommets et les arêtes d'un polyèdre donné. Par exemple, le groupe des rotations qui fixe globalement l'icosaèdre régulier est le groupe alterné A_5 ayant 60 éléments...

3. LUNES ET TRIANGLES

Notre objectif suivant est de calculer les aires de surfaces sphériques élémentaires, tels que les triangles sphériques. Avant de considérer des polygones à trois sommets, on

observe qu'il existe aussi des polygones à deux côtés sur la sphère, puisque deux grands cercles se coupent en deux *points*.

Définition 3.1. Un *digone*, plus communément appelé *lune*, est un polygone sphérique formé de deux sommets antipodaux A et B et de deux demi-grands cercles distincts les reliant.



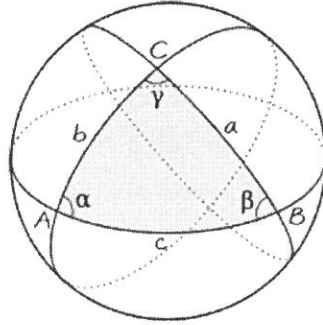
On observe que les angles en A et en B sont égaux, puisqu'il s'agit du même angle que celui entre les deux plans passant par le centre et qui définissent les deux grands cercles formant la lune.

Proposition 3.2. L'aire d'une lune d'angle α vaut $2\alpha r^2$.

Démonstration.

■

Définition 3.3. Un *triangle sphérique*, est formé de trois sommets, trois points distincts A, B, C se trouvant sur la sphère, et trois arcs de grands cercles distincts les reliant deux à deux : $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ et $\widehat{BC}$.



Le problème qui se présente avec cette définition est que si deux sommets sont antipodaux, il y a une infinité de segments qui les relient. Même si les sommets ne sont pas antipodaux, il y a un seul grand cercle qui passe par ces deux points, mais deux segments qui les relie... D'autre part où est l'intérieur du triangle ? La solution que nous choisissons pour nous simplifier la vie est de n'étudier que les triangles dont les côtés sont plus courts qu'un demi grand cercle.

4. L'AIRES D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE ET LA SOMME DES ANGLES

Quelle est l'aire d'un tel triangle sphérique ? La réponse nous est donnée par Albert Girard (1595 -1632).

Théorème 4.1. de Girard. *L'aire d'un triangle sphérique dont les angles valent α , β et γ radians est égal à $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.*

Démonstration. Les grands cercles AB , AC et BC découpent la sphère en six lunes, que l'on peut observer sur l'illustration ci-dessus. Appelons A' l'antipode de A , B' celle de B et C' celle de C . On a alors une lune L_A de sommets A, A' , d'angle α qui contient le triangle $\triangle ABC$ et une lune isométrique L'_A définie par les demi arcs de cercle complémentaires. On a de même des lunes L_B, L'_B, L_C et L'_C . On remarque que

$$\Sigma = L_A \cup L'_A \cup L_B \cup L'_B \cup L_C \cup L'_C$$

Or l'intersection $L_A \cap L_B$ est le triangle $\triangle ABC$ et il en va de même pour les deux autres intersections de lunes contenant le triangle, alors que les intersections de lunes antipodales sont égales au triangle antipodal $\triangle A'B'C'$. Enfin, la triple intersection $L_A \cap L_B \cap L_C = \triangle ABC$. Ainsi, l'aire de la sphère, qui est égale à $4\pi r^2$ vaut

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 6A(\triangle ABC) + 2A(\triangle ABC)$$

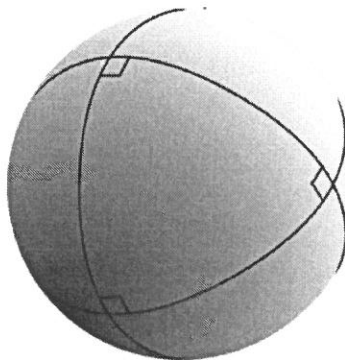
On en déduit immédiatement la formule de Girard. I

Une conséquence directe, mais fort intéressante est le calcul de la somme des angles d'un triangle sphérique.

Corollaire 4.2. *Soit $\triangle ABC$ un triangle sphérique dont les angles valent α , β et γ radians. Alors la somme des angles $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A(\triangle ABC)}{r^2}$.*

En particulier, la somme des angles est toujours strictement supérieure à π !

Exemple 4.3. Considérons un triangle dont un sommet est le pôle nord, les deux autres étant situés sur l'équateur de sorte que l'arc de grand cercle qui les relie parcourt un quart de l'équateur.



Alors les trois angles de ce triangle sphérique sont droits. La somme des angles vaut ici $3\pi/2$ et l'aire de ce triangle $\pi r^2/2$. Ce triangle est rectangle et équilatéral !

5. GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE

Pour construire une géométrie (d'incidence pour commencer) à partir de la géométrie sphérique, on décide d'identifier toute paire de points antipodaux. On définit ainsi le *plan projectif réel* $\mathbb{R}P^2 = \Sigma / \sim$, où $A \sim B$ si et seulement si A et B sont antipodaux. Les droites projectives sont les "quotients" des droites sphériques.

Même si nous ne maîtrisons pas encore les outils géométriques et topologiques pour rendre cette construction rigoureuse, l'idée est la suivante. Etant donné un point A de $\mathbb{R}P^2$ il en existe exactement deux sur la sphère dont l'image est A . Etant donné deux points distincts du plan projectif, il passe exactement une droite par ces points puisqu'ils correspondent à quatre points, antipodaux deux à deux, sur un unique grand cercle.

Cette géométrie ne forme pas un plan de Hilbert, puisque deux droites distinctes se coupent toujours. Or, en utilisant les axiomes d'un plan de Hilbert, on peut démontrer l'existence d'une parallèle à une droite donnée passant par un point donné (hors de la droite). On peut par contre remplacer les axiomes d'ordre par des axiomes de séparation et étudier de façon axiomatique la géométrie elliptique.

Pour obtenir un plan de Hilbert où la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux angles droits, on peut considérer un morceau de sphère de rayon "infini" dans une géométrie euclidienne non archimédienne. On peut choisir alors un morceau de diamètre fini. L'étude de tels objets nécessite des connaissances d'algèbre plus avancées !

6. TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Pour terminer nous donnons quelques éléments de trigonométrie sphérique. On travaille avec un triangle de sommets A, B, C sur une sphère de rayon 1. Ainsi les distances sphériques entre deux de ces points sont les angles mesurés au centre O de la sphère. On les note comme ci-dessus $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ et $\widehat{BC}$. On appelle encore α l'angle en A , β l'angle en B et γ celui en C . Finalement $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Ce sont tous des vecteurs de norme 1. En particulier on a

$$\cos \widehat{BC} = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

alors que

$$\sin \widehat{BC} = \|\vec{b} \wedge \vec{c}\|$$

Proposition 6.1. *On a les relations suivantes.*

$$(1) \cos \widehat{BC} = \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cos \alpha + \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC}, \text{ (Loi des cosinus);}$$

$$(2) \frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \gamma} = \frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \beta}, \text{ (Loi des sinus);}$$

$$(3) \cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \cos \widehat{BC} - \cos \beta \cos \gamma.$$

Démonstration. Le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est perpendiculaire au plan OAB et $\vec{a} \wedge \vec{c}$ est perpendiculaire au plan OAC . Puisque l'angle que forment ces plans entre eux est α on en déduit que

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{c} \rangle}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \cdot \|\vec{a} \wedge \vec{c}\|} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \cdot \|\vec{a} \wedge \vec{c}\|}$$

par l'identité de Lagrange. Ceci prouve (1) grâce aux remarques effectuées avant la proposition. Pour montrer (2) on utilise les mêmes vecteurs normaux, mais on effectue le produit vectoriel pour isoler le sinus de α :

$$\sin \alpha = \frac{\|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{a} \wedge \vec{c})\|}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \cdot \|\vec{a} \wedge \vec{c}\|} = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \cdot \|\vec{a} \wedge \vec{c}\|}$$

si bien que

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \widehat{BC}} = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|}{\sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \sin \widehat{BC}}$$

Un calcul analogue identifie les autres quotients de sinus avec la même expression. La dernière identité sera prouvée en exercice. |