Corrigés de quelques exercices d'oraux RMS 2023-2024

et d'exercices posés aux oraux à nos élèves ces dernières années

Contributeurs :
Jean-Christophe Bourgoin, Sandrine Dozias, Jordi Granados, Marie Hézard, David Hézard, Pascal Tonnelier
Lycée Descartes, Tours

Faire un rafraichissement de la page pour avoir la dernière version.

Version du 21 avril 2024, 12:57

Table des matières

1 ENS

1.1 Exercice 1

Soient S et T des ensembles finis non vides et f une application de S dans T. On pose $X = \{(x,y) \in S^2 / f(x) = f(y)\}$. Montrer que $|X| \geq max\left\{\frac{|S|^2}{|T|}, \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right\}$.

Rédaction 1

Soit $f \in T^S$. Posons $p = |T|$ et $T = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$. Posons pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $C_i = f^{-1}(\{y_i\})$

On a $|S| = \sum_{k=1}^{p} |C_i|$ et $|X|^2 = \sum_{k=1}^{p} |C_i|^2$. Selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|S| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{p} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{p} |C_i|^2}$ D'où $|S|^2 \leq |T||X|$. Ainsi $|X| \geq \frac{|S|^2}{|T|}$.

Si $|T| \geq |S|$, $\left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil = 1$ donc on a $\left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil = |S|$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $|C_i|^2 \geq |C_i|$ donc $|X^2| \geq |S|$ donc $|X| \geq \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil$.

Si $|T| < |S|$. On considère la division euclidienne de $|S|$ par $|T|$. On a $|S| = pq + r$, $0 \leq r < p$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $|C_i| = q + a_i$, où $a_i \in \mathbb{Z}$, $-q \leq a_i \leq |S| - q$ et $\sum_{i=1}^{p} a_i = r$. On a

$$\left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil = \begin{cases} q^2 + qp - q & \text{si } r = 0 \\ (q+1)^2 + qp + r - (q+1) = q^2 + q + qp + r & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, $|X| = \sum_{i=1}^{p} (q + a_i)^2 = pq^2 + 2qr + \sum_{i=1}^{p} a_i^2$.

<u>Si $r = 0$</u>
$|X|^2 \geq pq^2$ et $p \geq 1$ donc on a $p(q^2 - q) \geq q^2 - q$ donc $pq^2 \geq pq + q^2 - q$ donc $|X| \geq pq + q^2 - q$.

<u>Si $r > 0$</u>

On a nécessairement $p \geq 2$ car sinon $r < 1$ donc $r = 0$. L'un au moins des a_i est non nul donc $\sum_{i=1}^{p} a_i^2 \geq 1$ donc $|X| \geq pq^2 + 2qr + 1$. Vu que $q \geq 1$ et $r \geq 1$, $2qr \geq q + r$. Et enfin, $p(q^2 - q) + 1 \geq 2q^2 - 2q + 1$ et $2q^2 - 2q + 1 \geq q^2$ car cela revient à $(q-1)^2 \geq 0$. On obtient donc $p(q^2 - q) + 1 + 2qr \geq q^2 + q + r$ donc $pq^2 + 2qr + 1 \geq q^2 + pq + q + r$ donc $|X| \geq q^2 + pq + q + r$

Ainsi dans tous les cas, $|X| \geq \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil$. On a donc $|X| \geq max\left\{\frac{|S|^2}{|T|}, \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right\}$

Rédaction 2 :

On pose, pour tout $z \in T$, $F_z := f^{-1}(\{z\})$ et $n_z := |F_z|$. Avec ces notations,

$$S = \coprod_{z \in T} F_z \text{ et } X = \coprod_{z \in T} (F_z)^2.$$

On a donc $|S| = \displaystyle\sum_{z \in T} n_z$ et $|X| = \displaystyle\sum_{z \in T} (n_z)^2$ et d'après Cauchy-Schwarz,

$$|S|^2 = \left(\sum_{z \in T} 1 \times n_z \right)^2 \leqslant |T| \times |X|.$$

Ainsi, $|X| \geqslant \dfrac{|S|^2}{|T|}$ et comme $\|X| \in \mathbb{Z}$, $\boxed{|X| \geqslant \left\lceil \dfrac{|S|^2}{|T|} \right\rceil}$.

D'autre part, on a la partition suivante :

$$X = \{(x, x);\ x \in S\} \coprod \left(\coprod_{z \in T} \coprod_{\{a,b\} \in \mathcal{P}_2(F_z)} \{a, b\} \cup \{b, a\} \right)$$

où $\mathcal{P}_2(F_z)$ désigne les parties à 2 éléments de F_z.

Ainsi, $|X| = |S| + \displaystyle\sum_{z \in T} 2 \binom{n_z}{2} = |2| + \sum_{z \in T} n_z(n_z - 1)$.

Si, pour tout $z \in T$, $n_z < \dfrac{|S|}{|T|}$, alors $\displaystyle\sum_{z \in T} n_z < |S|$ ce qui est absurde.On a donc l'existence d'un élément $z_0 \in T$ tel $n_{z_0} \geqslant \dfrac{|S|}{|T|} > 0$ et comme n_{z_0} est un entier, $n_{z_0} \geqslant \left\lceil \dfrac{|S|}{|T|} \right\rceil \geqslant 1$. On peut donc conclure que

$$\boxed{|X| \geqslant |S| + n_{z_0}(n_{z_0} - 1) \geqslant |S| + \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil - 1 \right) = \left(\left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil \right)^2 + |S| - \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil}.$$

1.2 Exercice 9

1. **Calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$, où φ est l'indicatrice d'Euler.**

2. **Calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)$, où μ est la fonction de Möbius.**

3. **On pose, si $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = card\left(\left\{\dfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ q \leq x,\ \dfrac{p}{q} \leq 1\right\}\right)$.**
   Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \dfrac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln(x))$.

Très abusif. Se trouve dans tout livre de théorie analytique des nombres, évidemment, mais là n'est pas le problème. Suppose la connaissance de la formule d'inversion de Möbius qui devrait faire l'objet d'une question, de l'inverse de $\zeta(s)$, $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$.

1. $\varphi(d)$ est le nombre d'éléments d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et comme tout élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a un ordre divisant n, $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = card(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.
2. Tout les élèves ont déjà vu ça.
3. Rappelons la formule d'inversion de Möbius :
   Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ et $g : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \displaystyle\sum_{d|n} f(d)$.

   Alors pour tout n, $f(n) = \displaystyle\sum_{d|n} \mu(n/d) g(d) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d) = \sum_{d_1 d_2 = n} \mu(d_1) g(d_2)$.

   En effet, $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(n/d) g(d) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \left(\sum_{k|d} f(k) \right) = \sum_{k|d|n} \mu(n/d) f(k)$.

Pour $k \in \{1, ..., n\}$, $k|d|n$ fait que $d = ka$ avec $a|(n/k)$, donc la somme est $\sum_{k|n} f(k)\left(\sum_{a|(n/k)} \mu(n/(ka))\right) = \sum_{k|n} f(k)\left(\sum_{d|(n/k)} \mu(d)\right)$ (par couplage des diviseurs de n/k) $= f(n)$ par la question 2.

La question 1 donne donc par inversion de Möbius $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$.

Dans $\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ q \leq x,\ \frac{p}{q} \leq 1\right\}$, pour éliminer les répétitions, on prend $p \wedge q = 1$.
Oublions le cas $p = 0$, qui produit un terme, et va dans le $O(x\ln(x))$.
Soit donc $G(x) = card\left(\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^*,\ q \leq x,\ p \wedge q = 1,\quad p \leq q\right\}\right) = F(x) - 1$.
On a donc $G(x) = \sum_{1 \leq q \leq x} \varphi(q) = \sum_{1 \leq q \leq x} \sum_{d|q} \mu(d)\frac{q}{d} = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{1 \leq k \leq (x/d)} k$.
$\sum_{1 \leq k \leq (x/d)} k = E(x/d)(1 + E(x/d))/2 = (x/d)((x/d)+1)/2 + \theta$ avec $|\theta| \leq \frac{x}{d} + 1$ car $\frac{(m+1)(1+(m+1))}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1$.
De plus, $\sum_{d \leq x} |\mu(d)|(x/d+1) \leq \sum_{d \leq x}(x/d+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} x\ln(x)$, donc on est ramené à voir que :
$\sum_{d \leq x} \mu(d)(x/d)((x/d)+1)/2 = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln(x))$.
$\left|\sum_{d \leq x} \mu(d)(x/d)\right| \leq \sum_{d \leq x} \frac{x}{d} \underset{x \to +\infty}{\sim} x\ln(x)$.
Il reste donc à voir $\sum_{d \leq x} \mu(d)\frac{x^2}{2d^2} = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln(x))$ soit $\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2} + O(\ln(x)/x)$.
$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}\right) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}^*} \frac{\mu(k)}{n^2k^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{d|n}\mu(d)\right) = 1$, la sommabilité de $\frac{\mu(k)}{n^2k^2}$ venant de $\sum_{n,k \geq 1} \frac{1}{n^2k^2} = \frac{\pi^4}{36} < \infty$, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$ (le point de vue évident donnant cela est l'utilisation de développements Eulériens).
Donc $\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2} + \sum_{d > x} \frac{\mu(d)}{d^2}$.
Enfin, $\left|\sum_{d > x} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leq \sum_{d > x} \frac{1}{d^2} \underset{x \to +\infty}{=} O(1/x) = o(\ln(x)/x)$ par encadrement intégral.
On a fini.

1.3 Exercice 18

Soit $f \in Z[X]$. On pose $S_q = \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $q \wedge q' = 1$ alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

Soit $(q, q') \in \mathbb{N}^*$ avec $q \wedge q' = 1$. D'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $uq + vq' = 1$. Nous avons donc $v \wedge q = 1$, v est donc inversible pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Notons $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Il s'agit de l'ensemble des classes de $Z/q\mathbb{Z}$ dont les représentants sont premiers avec q. On voit alors aisément que l'application : $\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \\ a & \longmapsto & av \end{array}$ est une bijection— on identifie ici $a \in \{0, \cdots, q-1\}$ avec sa classe modulo q. Il s'ensuit que pour toute application g de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ constante sur chaque classe modulo q, $\sum_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} g(a) = \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} g(av)$. De même, u étant premier avec q' pour toute application $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante sur chaque classe modulo q', $\sum_{\substack{0 \leq a' < q' \\ a' \wedge q' = 1}} g(a') = \sum_{\substack{0 \leq a' < q' \\ a' \wedge q' = 1}} g(a'u)$. On a donc $S_q = \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a v f(n)}{q}}$ et $S_{q'} = \sum_{\substack{0 \leq a' < q' \\ a' \wedge q' = 1}} \sum_{m=0}^{q'-1} e^{\frac{2i\pi a' u f(m)}{q}}$.

Nous avons aussi vq' inversible dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ainsi que uq dans $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$ et donc les applications $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & vq'n \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z} \\ m & \longmapsto & uqm \end{array}$ sont des bijections. Ainsi $S_q = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a v f(vq'n)}{q}}$ et $S_{q'} = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq a' < q' \\ a' \wedge q' = 1}} \sum_{m=0}^{q'-1} e^{\frac{2i\pi a' u f(uqm)}{q}}$.

Ainsi,

$$S_q S_q' = \sum_{\substack{(a',a') \in \{0, \cdots, q-1\}^2 \\ a \wedge q = 1\,;\, a' \wedge q' = 1}} \sum_{\substack{0 \leq n \leq q-1 \\ 0 \leq m \leq q'-1}} e^{\frac{2i\pi a v f(vq'n)}{q} + \frac{2i\pi a' u f(uqm)}{q'}} = \sum_{\substack{(a',a') \in \{0, \cdots, q-1\}^2 \\ a \wedge q = 1\,;\, a' \wedge q' = 1}} \sum_{\substack{0 \leq n \leq q-1 \\ 0 \leq m \leq q'-1}} e^{\frac{2i\pi (a v q' f(vq'n) + a' u q f(uqm))}{qq'}} \quad (\star).$$

Nous avons $f(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, $(vq'n + uqm)^k = (vq'n)^k + (uqm)^k + \underbrace{\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} (vq'n)^l (uqm)^{k-l}}_{\text{divisible par } qq'}$. On déduit donc que $f(vq'n + uqm) = f(vq'n) + f(uqm)$ *modulo* qq'. De plus, en développant on a $(avq' + a'uq)(m^k u^k q^k + n^k v^k q'^k) = avq'(vq'n)^k + a'uq(uqm)^k$ *modulo* qq', donc $(avq' + a'uq)(f(vq'n) + f(uqm)) = avq' f(vq'n) + a'uqf(uqm)$ *modulo* qq'. En reprenant l'égalité $(\star)$, on obtient

$$S_q S_q' = \sum_{\substack{0 \leq n \leq q-1 \\ 0 \leq m \leq q'-1}} \sum_{\substack{(a',a') \in \{0, \cdots, q-1\}^2 \\ a \wedge q = 1\,;\, a' \wedge q' = 1}} e^{\frac{2i\pi (avq' + a'uq)(f(vq'n + uqm)}{qq'}}.$$

À présent, on considère l'application $\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/qq'\mathbb{Z} \\ & (n[q], m[q']) & \longmapsto & vq'n + uqm[qq'] \end{array}$. Il s'agit d'un isomorphisme ; son application réciproque est l'isomorphisme du théorème chinois : $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/qq'\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z} \\ z[qq'] & \longmapsto & (z[q], z[q']) \end{array}$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/qq'\mathbb{Z}))^*$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$ et donc $\{avq' + a'uq[qq']/(a,a') \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*\}$ décrit $(\mathbb{Z}/qq'\mathbb{Z})^*$ et donc $S_q S_q' = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq n \leq q-1 \\ 0 \leq m \leq q'-1}} \sum_{\substack{0 \leq a'' < q'q \\ a'' \wedge qq' = 1}} e^{\frac{2i\pi a'' f(vq'n + uqm)}{qq'}}$. Enfin, puisque ϕ est une bijection, $S_q S_q' = \displaystyle\sum_{z=0}^{qq'-1} \sum_{\substack{0 \leq a'' < q'q \\ a'' \wedge qq' = 1}} e^{\frac{2i\pi a'' f(}{qq'}}$

Ainsi $S_q S_q' = S_{qq'}$.

1.4 Exercice 26

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

On va montrer un résultat un peu plus fort en remplaçant « scindé » par « scindé simple ». On montre le résultat par récurrence.
Le cas $n = 1$ est trivial.
Pour l'hérédité, on considère une suite $(a_0, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$ tel que pour toute suite ϵ de signes le polynôme $Q_\epsilon := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k a_k X^k$ est scindé simple sur $\mathbb{R}$. On note tout simplement Q le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On va à partir de Q construire un polynôme P de degré $n+1$ qui vérifie le résultat à montrer.
$a_0 \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de Q_ϵ. Ainsi, chaque polynôme $P_\epsilon = XQ_\epsilon$ est scindé simple sur $\mathbb{R}$. Pour toute suite ϵ de signes, il existe $c_\epsilon > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leqslant c_\epsilon$, le polynôme $P_\epsilon + a$ est encore scindé simple (faire un dessin). Comme l'ensemble $\{-1, 1\}^{n+1}$ est fini, on peut considérer $c = \min(c_\epsilon;\ \epsilon \in \{-1, 1\}^{n+1})$. Alors le polynôme $XQ + c$ répond au problème au rang $= n + 1$.

1.5 Exercice 28

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$.
Montrer que $D(0, 1/n) \subset P(D(0, 1))$ (disques ouverts).

Procédons par l'absurde. Supposons l'existence de $a \in D(0, 1/n)$ qui n'est pas dans $P(D(0, 1))$.
On se fixe un tel a.
Les antécédents de a par P sont les racines de $P - a$.
On a donc $P - a = \mu(X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$ avec $|\lambda_i| \geq 1$ et $\mu \neq 0$.
$P(0) = 0$ donne $a = (-1)^{n+1} \mu \lambda_1 ... \lambda_n$.
$P'(0) = 1$ donne $(-1)^{n-1} \mu(\lambda_2 ... \lambda_n + \lambda_1 \lambda_3 ... \lambda_n + ... + \lambda_1 ... \lambda_{n-1}) = 1$.

En exprimant μ avec la première formule, et en remplaçant dans la deuxième, $a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}=1$.

Mais $\left|a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\right|\leq |a|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_i|}\leq n|a|<1$. Contradiction.

1.6 Exercice 42

Soient $n\geq 2$, $\phi_1,...,\phi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g\in SL(\mathbb{R}^2)$, soit $f_g:(x_1,...,x_n)\in(\mathbb{R}^2)^n\mapsto\phi_1(g(x_1))\times...\times\phi_n(g(x_n))\in\mathbb{R}$.
Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
i) il existe une suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $SL(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tous vecteurs $x_1,...,x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}(x_1,...,x_n)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
ii) il existe une droite vectorielle L telle que $|\{i\mid L\subset Ker(\phi_i)\}|>\frac{n}{2}$.

Notons que $\dim(Ker(\phi_i))=1$, et que $L\subset Ker(\phi_i)$ revient à $L=Ker(\phi_i)$.
$|\{i\mid L\subset Ker(\phi_i)\}|>\frac{n}{2}$ se retraduit en "il existe strictement plus de $n/2$ formes linéaires parmi les ϕ_i colinéaires deux à deux".

$(ii)\implies(i)$: On suppose (ii) vraie. Quitte à renuméroter, supposons pour un k donné, $k>n/2$, que $\phi_i=\lambda_i\phi_1$ pour $i\leq k$.
$f_g(x_1,...,x_n)=\lambda_2...\lambda_k\phi_1(g(x_1))...\phi_1(g(x_k))\phi_{k+1}(g(x_{k+1}))...\phi_n(g(x_n))$.
Soit e_1 non nul dans $Ker(\phi_1)$. On complète en $B=(e_1,e_2)$ base de $\mathbb{R}^2$.
Si $p\geq 1$, soit g_p tel que $Mat_B(g_p)=\begin{pmatrix}p&0\\0&1/p\end{pmatrix}$. $g_p\in SL(\mathbb{R}^2)$.
Donnons nous $x_1,...,x_n\in\mathbb{R}^2$. On note $x_i=\alpha_ie_1+\beta_ie_2$.
Si $i\leq k$, $\phi_i(g_p(x_i))=\frac{1}{p}\phi_i(\beta_ie_2)\underset{p\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{p}\right)$.
Si $i>k$, $\phi_i(g_p(x_i))=p\phi_i(\alpha_ie_1+(1/p^2)\beta_ie_2)\underset{p\to+\infty}{=}O(p)$.
Ainsi $f_{g_p}(x_1,...,x_n)\underset{p\to+\infty}{=}O(p^{-k+n-k})=O(p^{n-2k})\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$ car $n-2k<0$.

$(i)\implies(ii)$: Notons $E=\mathbb{R}^2$.
Le cas $n=1$ est trivial. On suppose $n\geq 2$.
On procède par contraposition.
Il faut montrer que si $\phi_1,...,\phi_n$ sont des formes linéaires non nulles, telles qu'il n'y en a pas plus de $n/2$ deux à deux colinéaires, alors (i) est faux.

$F:(x_1,x_2)\in E^2\mapsto\det\begin{pmatrix}\phi_1(x_1)&\phi_1(x_2)\\\phi_2(x_1)&\phi_2(x_2)\end{pmatrix}$ est facilement 2-linéaire alternée.
Si $g\in SL(E)$, soit $H_g:(x_1,x_2)\in E^2\mapsto\det\begin{pmatrix}\phi_1(g(x_1))&\phi_1(g(x_2))\\\phi_2(g(x_1))&\phi_2(g(x_2))\end{pmatrix}$.
$H_g(x_1,x_2)=F(g(x_1),g(x_2))=\det(g)F(x_1,x_2)=F(x_1,x_2)$, ie $H_g=F$.
En effet, soit B une base de E. $F=\lambda\det_B$, donc $H_g(x_1,x_2)=\lambda\det_B(g(x_1),g(x_2))$. $q:(x_1,x_2)\mapsto\det_B(g(x_1),g(x_2))$ est 2-linéaire alternée, donc $q=\mu\det_B$. En prenant $(x_1,x_2)=B$, on obtient $\mu=\det(g)$.
Remarquons que si ϕ_1 et ϕ_2 sont non colinéaires, et (x_1,x_2) est une base de E, $F(x_1,x_2)\neq 0$.

On suppose donc que $\phi_1,...,\phi_n$ sont des formes linéaires non nulles, telles qu'il n'y en a pas plus de $n/2$ deux à deux colinéaires.

Si $n=2p$ est pair : on a facilement (par récurrence sur n par exemple, en considérant une famille maximale de ϕ_i deux à deux colinéaires) que l'on peut regrouper les ϕ_i deux à deux en couples de formes linéaires non colinéaires.
Quitte à renuméroter, on suppose (ϕ_1,ϕ_2), (ϕ_3,ϕ_4), ... libres.
Soit (y_1,y_2) une base de E.
Supposons par l'absurde l'existence de (g_k) telle que $\forall x_1,...,x_n,\ f_{g_k}(x_1,...,x_n)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Alors $\det\begin{pmatrix}\phi_1(g_k(y_1))&\phi_1(g_k(y_2))\\\phi_2(g_k(y_1))&\phi_2(g_k(y_2))\end{pmatrix}\times...\times\det\begin{pmatrix}\phi_{n-1}(g_k(y_1))&\phi_{n-1}(g_k(y_2))\\\phi_n(g_k(y_1))&\phi_n(g_k(y_2))\end{pmatrix}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par développement des déterminants et développement du produit, ce qui donne 2^p termes convergeant tous vers 0. Mais par ce qui précède, tous les déterminants sont indépendants de g_k et non nuls, donc on a une absurdité.

Si $n=2p+1$ est impair : il y a au plus p formes linéaires deux à deux colinéaires.

Supposons par l'absurde l'existence de (g_k) telle que $\forall x_1, ..., x_n,\ f_{g_k}(x_1, ..., x_n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Disons que (ϕ_1, ϕ_2) est libre. Soit (e_i) une base de $Ker(\phi_i)$, $i = 1, 2$. $B = (e_1, e_2)$ est libre.
Notons $M_B(g_k) = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$.
$\phi_1(g_k(e_1)) = c_k\phi_1(e_2)$, $\phi_1(g_k(e_2)) = d_k\phi_1(e_2)$, $\phi_2(g_k(e_1)) = a_k\phi_2(e_1)$, $\phi_2(g_k(e_2)) = b_k\phi_2(e_1)$.
Comme $a_kd_k - c_kb_k = 1$, les quatre quantités ne peuvent toutes converger vers 0.
Disons que $(\phi_1(g_k(e_1)))_k$ ne converge pas vers 0. Quitte à extraire, disons $\forall k$, $|\phi_1(g_k(e_1))| \geq C$ avec $C > 0$.
Alors, avec $x_1 = e_1$, on a $\forall x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^2$, $\phi_2(g_k(x_2))...\phi_{2p+1}(g_k(x_{2p+1})) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est impossible par le cas n pair précédent.

1.7 Exercice 46

Soient A et B deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B. Montrer que $BA = \pm AB$.

On pose $C = ABA^{-1}B^{-1}$ et on note I la matrice identité. On remarque que $\det(C) = 1$. Ainsi, si $C = \alpha I$, alors $\alpha^2 = 1$ et on obtient $AB = \pm BA$. De plus, si $AB = \pm BA$ alors C est scalaire. On va donc montrer par disjonction de cas qu'on est toujours de l'une de ces situations :

- Si (I, A) est liée, comme $I \neq 0$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A = \alpha I$ et donc $AB = BA$;
- Sinon, (I, A) est libre. Si (I, A, B) est liée, comme (I, A) est libre, il existe deux réels α et β tels que $B = \alpha I + \beta A$. Ainsi, A et B commutent : $AB = BA$.
- Sinon, (I, A, B) est libre. Si (I, A, B, C) est liée il existe trois réels α, β et γ tels que $C = \alpha I + \beta A + \gamma B$. C, I et A commutent avec A donc B commute avec A (et on a le résultat voulu) ou $\gamma = 0$. Dans ce dernier cas, $C = \alpha I + \beta A$ et par hypothèses, B commute avec C et I donc B commute avec A (et on a le résultat voulu) ou $\beta = 0$. Dans ce dernier cas, $C = \alpha I$ donc C est scalaire.
- Sinon, (I, A, B, C) est libre et forme une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Or C commute avec I, A et B donc C commute avec toute matrice. C est donc scalaire.

1.8 Exercice 59

Soient E un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tous i, j, $< u_i, v_j >= \delta_{i,j}$.
On note p le projecteur orthogonal de E sur $Vect(u_1, ..., u_m)$.
Montrer que $\forall x \in E$, $||p(x)||^2 = \sum_{i=1}^{m} < u_i, x >< p(v_i), x >$.

Soit $V = vect(u_1, ..., u_m)$. On note $v_i = w_i + h_i$ avec $w_i \in V,\ h_i \in V^\perp$. $w_i = p(v_i)$.
$(u_1, ..., u_m)$ est libre car si $\sum_i \lambda_i u_i = 0$, en faisant le produit scalaire par v_j, $\lambda_j = 0$.
Dans V, (w_i) est la base duale de (v_i). $< w_i, v_j >= \delta_{i,j}$.
Si $x \in V,\ x = \sum_i < x, v_i > w_i = \sum_i < x, w_i > v_i$.
Soit $x \in E$.
$p(x) = \sum_i < p(x), u_i > w_i = \sum_i < x, u_i > w_i = \sum_j < p(x), w_j > u_j = \sum_j < x, w_j > u_j$.
$||p(x)||^2 = \sum_{i,j} < x, u_i >< x, w_j >< w_i, u_j >= \sum_i < x, u_i >< x, w_j >= \sum_i < x, u_i >< x, p(v_i) >$.

1.9 Exercice 61

Soit E un espace euclidien, et $u, u_1, ..., u_m \in E$.
Montrer que sont équivalents

1. $u \in \mathbb{R}^+u_1 + ... + \mathbb{R}^+u_m$
2. $\{x \in E \mid \forall i,\ < x, u_i >\leq 0\} \subset \{x \in E \mid\ < x, u >\leq 0\}$

Il s'agit d'une version du lemme de Farkas, bien connu, et dont de multiples démonstrations existent.
Déjà, $1 \Longrightarrow 2$ est immédiat.
Concernant $2 \Longrightarrow 1$, plutôt que de donner une démonstration usuelle, on se contente de signaler des cas simples légitimement attendus par les examinateurs :
Notons $C = \mathbb{R}^+u_1 + ... + \mathbb{R}^+u_m$ et $Q = \{x \in E \mid \forall i,\ < x, u_i >\leq 0\}$.

• En premier lieu, en dimension 2, dessiner dans le plan, pour u_1, u_2 donnés, les ensembles $\mathbb{R}^+u_1 + \mathbb{R}^+u_2$, et $\{x \in E \mid \forall i,\ < x, u_i > \leq 0\}$, et constater le résultat.
• En second lieu, traiter un cas particulier : $(u_1, ..., u_m)$ base de E. :
On se donne alors $(y_1, ..., y_m)$ la base duale associée, ie telle que $< y_i, u_j >= \delta_{i,j}$, y_i venant du théorème de Riesz appliqué à u_i^*.
Supposant (2) vrai : on écrit $u = \displaystyle\sum_i \lambda_i u_i$.
$-y_k \in Q$, donc $< u, -y_k > \leq 0$, ie $-\lambda_k \leq 0$.
• En troisième lieu, traiter le cas $(u_1, ..., u_m)$ libre en écrivant $u = v + h$ avec $v \in V := vect(u_1, ..., u_m)$, et $h \in V^\perp$.
Alors, si (2) est vrai, $h \in C$, donc $< u, h >= ||h||^2 \leq 0$, donc $h = 0$, donc $u \in V$ et on se ramène au cas précédent.

• Dans le cas général on montre d'abord que C (cône convexe) est fermé. Pour cela, on montre que $C = \displaystyle\bigcup_{I \subset K} \sum_{i \in I} \mathbb{R}^+ u_i$, où K est l'ensemble des parties I non vides de $\{1, ..., m\}$ telles que $(u_i)_{i \in I}$ est libre, ce qui est très semblable à la démonstration du théorème de Caratheodory, et on utilise un résultat de séparation si $u \notin C$.

1.10 Exercice 71

1. **Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre positif.**
2. **Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f : X \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto tr(AX) + tr(BX^{-1})$.**
   Montrer que f admet un minimum atteint en une unique matrice, à calculer.

1. Soit $S = \sqrt{A}$. $AB = S^2B = S(SBS)S^{-1}$ est semblable à SBS, symétrique donc diagonalisable, donc AB est diagonalisable.
   De plus $Sp(AB) = Sp(SBS)$ et $SBS \in S_n^+(\mathbb{R})$ car $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ < SBSX, X >=< BSX, SX > \geq 0$.
2. Procédons par calcul différentiel.

   Quelques points préliminaires qui vont servir :
   • On rappelle que $< AB, C >=< B, A^TC >=< A, CB^T >$, $< \ ,\ >$ étant le produit scalaire canonique, et $< A, B >=< A^T, B^T >$.
   • Classiquement, si S est symétrique et $X \in \mathbb{R}^n$, $< SX, X > \geq \min(Sp(S))||X||^2$.
   En particulier, avec $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $S_{i,i} =< Se_i, e_i > \geq \min(Sp(s))$
   • On a le DL $(I_n + H)^{-1} \underset{H \to 0}{=} I_n - H + o(H)$.
   On peut l'obtenir avec un norme sous-multiplicative, auquel cas si $||H|| < 1$,
   $(I_n + H)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + H \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} H^k$, et $\displaystyle||\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} H^k|| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} ||H||^k = \frac{||H||}{1 - ||H||} \xrightarrow[H \to 0]{} 0$.
   • Il en découle, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$,
   $(M + H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n - M^{-1}H + o(H))M^{-1} = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(H)$ (pour justifier les "o", utiliser une norme sous-multiplicative).
   Il s'agit de la différentiabilité et de la différentielle de l'inversion en M.

   Considérons donc notre fonction f. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'ev $S_n(\mathbb{R})$.

   L'ev ambiant sera $S_n(\mathbb{R})$.

   Nous allons montrer que f atteint son minimum en un point de $S_n^{++}(\mathbb{R})$, ce qui entrainera que la différentielle de f y est nulle.
   $f(X) = tr(AX) + tr(BX^{-1}) =< A, X > + < B, X^{-1} >$.
   $X \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $X^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. La question 1 entraîne que AX et BX^{-1} sont diagonalisables à spectre positif, donc les deux produits scalaires sont positifs.
   Si $X \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, écrivons $X = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^T$ avec $P \in O(n)$.
   $< A, X >=< P^TAP, diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) >= \displaystyle\sum_i \lambda_i V_{i,i}$ avec $V = P^TAP$.
   V est symétrique semblable à A, donc $V_{i,i} \geq \min(Sp(A))$.
   Tous les termes étant positifs, $< A, X > \geq \min(Sp(A)) \max(Sp(X))$.
   De même $< B, X^{-1} > \geq \min(Sp(B)) \dfrac{1}{\min(Sp(X))}$.
   En prenant $a = \min(\min(Sp(A)), \min(Sp(B))) > 0$, $f(X) \geq a(\max(Sp(X)) + 1/\min(Sp(X)))$.

Donnons nous $(X_k) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f(X_k) \to inf(f) \geq 0$.
La minoration précédente entraîne que le spectre de X_k est assujetti a rester dans un certain intervalle $[u,v]$ avec $0 < u < v$.
Par compacité de $O(n) \times [u,v]^n$, et théorème spectral, quitte à extraire, on peut supposer $X_k \to Y \in S_n(\mathbb{R})$ avec $Sp(Y) \subset [u,v]$.
La continuité de f donne que $f(Y) = \min(f)$.
La différentielle de f en Y, dont on va voir l'existence, est nulle.

Si $H \in S_n(\mathbb{R})$, $f(Y+H) =< A, Y+H > + < B, (Y+H)^{-1} >=< A, Y+H > + < B, Y^{-1} - Y^{-1}HY^{-1} + o(H) >= f(Y)+ < A - Y^{-1}BY^{-1}, H > +o(H)$.
Le gradient de f en Y, $A - Y^{-1}BY^{-1}$ est nul.
$A = Y^{-1}BY^{-1}$ soit $YAY = B$ (*).
Soit $C = A^{1/2}YA^{1/2}$ de sorte que $Y = A^{-1/2}CA^{-1/2}$.
La symétrie de Y équivaut à celle de C, et si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $< Yx, x >=< CA^{-1/2}x, A^{-1/2}x >$, donc le caractère défini positif de Y équivaut à celui de C.
$(*) \iff A^{-1/2}C^2A^{-1/2} = B \iff C^2 = A^{1/2}BA^{1/2}$, et $A^{1/2}BA^{1/2} \in S_n^{++}$, donc $(*) \iff C = (A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2}$, et donc $Y = A^{-1/2}(A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2}A^{-1/2}$.
Si A et B commutent, $Y = B^{1/2}A^{-1/2}$ et $f(Y) = 2 < A^{1/2}, B^{1/2} >$.

1.11 Exercice 78

$\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $|| \, ||_2$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni de la norme d'opérateur $||| \, |||$ associée. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|||e^{iB} - e^{iB}||| \leq |||A - B|||$.

Si $X \in \mathbb{C}^n$, $||X||_2^2 = tr(\overline{X}^T X) = \sum_i |x_i|^2$.
Notons que si $S \in S_n(\mathbb{R})$, e^{iS} converve la $|| \, ||_2$ ($e^{iS} \in U(n)$, HP)
En effet, $||e^{iS}X||_2^2 = tr(\overline{X}^T e^{-iS}e^{iS}X) = tr(\overline{X}^T X) = ||X||_2^2$.
De ce fait, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|||e^{iS}M||| = |||M|||$, et $|||Me^{iS}||| = |||M|||$ (pour le deuxième, $e^{iS}X$ décrit $S(0,1)$ quand X décrit $S(0,1)$, e^{-iS} conservant également la norme).
Considérons $f(t) = e^{i(1-t)A}e^{itB}$.
$f'(t) = e^{i(1-t)A}i(B-A)e^{itB}$ (car $\dfrac{d}{dt}(e^{tM}) = Me^{tM} = e^{tM}M$). $|||f'(t)||| = |||B - A|||$.
Alors $|||e^{iA} - e^{iB}||| = |||\int_0^1 f'||| \leq \int_0^1 |||f'||| \leq |||A - B|||$, l'inégalité triangulaire intégrale marchant avec toute norme.

1.12 Exercice 82

Peut-on écrire l'intervalle $]0,1[$ comme une réunion dénombrable de segments disjoints d'intérieur non vide ?

Rédaction 1 :

Supposons l'existence d'une suite de segments deux à deux disjoints recouvrant $]0,1[$ et d'intérieur non vide. On pose S cet ensemble de segments. On va montrer que cela est impossible en montrant que $]0,1[\setminus \bigcup_{s\in S} s$ est non vide. On opère pour cela par un procédé constructif. En premier lieu, étant donné que les segments sont deux à deux disjoints, faisons le constat que pour tout $r > 0$, $\{s \in S \,;\, |s| > r\}$ est fini car sinon $\sum_{s\in S/|s|>R} |s| = +\infty$ alors que cette somme est majorée par $|]0,1[| = 1$. De cela, il découle de suite que on a $\inf\{|s| \in S\} = 0$ car sinon S serait fini donc $]0,1[$ serait fermé ce qui est faux. De plus, si $]a,b[\subset]0,1[$ avec a et b des extrémités d'un segment de S et $[a,b]$ qui n'est pas un segment de S, on a $]a,b[= \bigcup_{s\in S \text{ et } s\subset]a,b[} s$ et donc $\inf\{|s| \in S \,;\, s \subset]a,b[\} = 0$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \{s \in S/|s| > \dfrac{1}{n}\}$. K_n est fini (éventuellement vide). On pose $n_0 = min\{n \in \mathbb{N}/K_n \neq \varnothing\}$. On a $]0,1[= \bigcup_{s\in S} s = \bigcup_{n\geq n_0} K_n$ et, pour tout $n \geq n_0$, $K_n \subset K_{n+1}$ car si $|s| > \dfrac{1}{n}$ alors $|s| > \dfrac{1}{n+1}$.

Étant donné un ensemble A fini de segments deux à deux disjoints inclus dans $]0,1[$ et a un réel de $]0,1[$ inclut dans aucun des segments de A, on définit, si celui-ci existe, le segment "le plus proche à gauche de a" parmi les éléments de A, le segment s' de A de sorte que $max(s') \leq a$ et $|max(s') - a| = min\{|max(s) - a| \,;\, s \in A \,\text{et}\, max(s) \leq a\}$. On définit de façon analogue le segment de A "le plus proche à droite " de a.

Soit $s_1 = [c_1, d_1]$ le segment de K_{n_0} le plus proche à droite de 0. Celui-ci existe car K_{n_0} est non vide et est fini. On pose $a_1 = 0$ et $b_1 = c_1$. On a, du fait des définitions posées ci-avant, $]a_1, b_1[\subset]0,1[\backslash K_{n_0}$.

On pose $n_1 = min\{n \geq n_0 + 1 / K_n \cap]a_1, b_1[\neq \varnothing\}$. Soit $s_2 = [c_2, d_2]$ le segment de K_{n_1} le plus proche à gauche de c_1. On pose $a_2 = d_2$ et $b_2 = c_1$. On a nécessairement, $]a_2, b_2[\subset]0,1[\backslash K_{n_1}$.

On pose $n_2 = min\{n \geq n_1 + 1 / K_n \cap]a_2, b_2[\neq \varnothing\}$. Soit $s_3 = [c_3, d_3]$ le segment de K_{n_2} le plus proche à droite de d_2. On pose $a_3 = d_2$ et $b_3 = c_3$. On a nécessairement, $]a_3, b_3[\subset]0,1[\backslash K_{n_2}$. On a donc $a_1 < a_2 \leq a_3$ et $b_3 < b_2 \leq b_1$ donc $a_3 > a_1$ et $b_3 < b_1$.

On procède en continuant ainsi par récurrence en considérant alternativement des segments "plus proche à gauche" et "plus proche à droite" et en construisant une suite d'entiers strictement croissante (n_i), de segments $[c_i, d_i]$ de K_{n_i}, d'intervalles $]a_i, b_i[$ de sorte que pour tout i, $[c_{i+1}, d_{i+1}] \subset]a_i, b_i[$, $]a_{i+1}, b_{i+1}[\subset]a_i, b_i[$, (a_{2i+1}) est strictement croissante, (b_{2i+1}) est strictement décroissante et $]a_{i+1}, b_{i+1}[\subset]0,1[\backslash K_{n_i}$.

(a_i) est croissante, majorée par 1, (b_i) est décroissante minorée par 0 donc ces suites convergent. Posons $c = \lim a_i$ et $d = \lim b_i$. Soit $x \in [c, d]$. (a_{2i+1}) est strictement croissante et converge vers c, (b_{2i+1}) est strictement décroissante et converge vers d donc nécessairement pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_{2i+1} < c \leq x \leq d < b_{2i+1}$. Montrons que $x \in]0,1[\backslash \bigcup_{s\in S} s$ c'est-à-dire $x \in \bigcap_{n\geq n_0}]0,1[\backslash K_n$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$. (n_i) est strictement croissante donc tend vers $+\infty$. Soit $i \in \mathbb{N}$ de sorte que $n_i > k$. Donc a fortiori, $n_{2i} > k$.

Comme $x \in]a_{2i+1}, b_{2i+1}[$ et $]a_{2i+1}, b_{2i+1}[\subset]0,1[\backslash K_{n_{2i}}$, $x \in]0,1[\backslash K_{n_{2i}}$. Or, $K_k \subset K_{n_i}$, car la suite $(K_n)_{n\geq n_0}$ est croissante pour l'inclusion, donc $]0,1[\backslash K_{n_i} \subset]0,1[\backslash K_k$ donc $x \in]0,1[\backslash K_k$. Ainsi $x \in \bigcap_{n\geq n_0}]0,1[\backslash K_n$ donc $x \in]0,1[\backslash \bigcup_{s\in S} s$.

Ceci conclut qu'il n'existe pas une telle suite de segment S.

Rédaction 2 :

La réponse est non.
Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments disjoints 2 à 2 inclus dans $]0,1[$.
Montrons l'existence de $x \in]0,1[$ qui n'est dans aucun $[a_n, b_n]$.
On va construire une suite d'intervalle ouverts $]c_n, d_n[\subset]0,1[$, $n \geq 1$ telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, c_n, d_n sont dans $\{a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n\}$.
2. $\forall n,\ c_n \leq c_{n+1} < d_{n+1} \leq d_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ ]c_n, d_n[\cap(\bigcup_{k=0}^{n} [a_k, b_k]) = \emptyset$.

La méthode de construction impliquera que soit (c_n) et (d_n) ne stationnent pas, soit elles stationnent toutes deux.
On justifiera ensuite qu'alors $\bigcap_n]c_n, d_n[\neq \emptyset$, et que si $x \in \bigcap_n]c_n, d_n[$, alors x n'est dans aucun $[a_n, b_n]$.

On définit $]c_n, d_n[$ par récurrence.
On initialise un compteur p à 0.
Quitte à réindexer, disons $a_0 \leq b_0 < a_1 \leq b_1$. On prend $]c_1, d_1[=]b_0, a_1[$.
Supposons $c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n$ construits vérifiant les hypothèses annoncées jusqu'au rang n.
Comme $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ne contient pas $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n$, et donc pas c_n, d_n, deux cas se présentent :
Soit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap]c_n, b_n[= \emptyset$, auquel cas on prend $]c_{n+1}, d_{n+1}[=]c_n, d_n[$.
Soit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset]c_n, d_n[$ auquel cas on prend :
$]c_{n+1}, d_{n+1}[=]c_n, a_{n+1}[$ si p est pair, et on incrémente p de 1.
$]c_{n+1}, d_{n+1}[=]b_{n+1}, d_n[$ si p est impair, et on incrémente p de 1.

Les hypothèses au rang $n+1$ sont immédiatement vérifiées.

Cas 1 : Si (c_n) ou (d_n) stationne : l'alternance dans le second cas, qui change c_n (resp. d_n) une fois sur deux, implique qu'à partir d'un certain rang, on est dans le premier cas, donc $(]c_n, d_n[)$ stationne. $c_n = y$, $d_n = z$ APCR.
$y < z$. Si $x \in]y, z[$, $x \in]0,1[$ et x n'est dans aucun $[a_n, b_n]$ du fait de l'hypothèse 3.
Cas 2 : Ni (c_n), ni (d_n) ne stationne. Par convergence monotone, $c_n \to y$, $d_n \to z$, et $c_n < d_n$ donne $y \leq z$.
Soit $x \in [y, z]$. La non stationnarité de (c_n) et (d_n) donne $\forall n,\ c_n < y$ et $z < d_n$ ce qui donne $x \in]c_n, d_n[$ pour tout n, ce qui garantit avec l'hypothèse 3, que x n'est dans aucun $[a_n, b_n]$.

L'alternance dans le second cas de la définition par récurrence, et la discussion sur les problèmes de stationnarité sont importants : penser par exemple à $]c_n, d_n[=]1/2, 1/2+1/n[$. $\bigcap_n]c_n, d_n[=\emptyset$.

1.13 Exercice 87

Soient $(M_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\dfrac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|} \to N$.

Solution 1 :

Comme $\|M_k\| \to +\infty$, à partir d'un certain rang $\|M_k\| \neq 0$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que cela est toujours vrai. On pose alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k := \dfrac{M_k}{\|M_k\|}$. La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (et on est en dimension finie) donc il existe une extractrice φ telle que $(N_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice N. Il reste à montrer que N est nilpotente. Pour cela, on va montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(N^j) = 0$. Les matrices M_k sont toutes semblables donc, à j fixé, les matrices $(M_k)^j$ sont toutes semblables. Elles ont donc la même trace que l'on note t_j. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|}\right)^j\right] = \frac{t_j}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|^j} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or la trace est continue (application linéaire en dimension finie) donc, $\mathrm{Tr}\left[\left(\dfrac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|}\right)^j\right] \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Tr}(N^j)$ et par unicité de la limite, $\mathrm{Tr}(N^j) = 0$. On est alors ramené à une situation classique et on peut affirmer que N est nilpotente.

Solution 2 :

Comme $\|M_k\| \to +\infty$, à partir d'un certain rang $\|M_k\| \neq 0$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que cela est toujours vrai. On pose alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k := \dfrac{M_k}{\|M_k\|}$. La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (et on est en dimension finie) donc il existe une extractrice φ telle que $(N_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice N. Il reste à montrer que N est nilpotente.
On va chercher son polynôme caractéristique. Toutes les M_k ont le même polynôme caractéristique (celui de M_1) par exemple, puisqu'elles sont toutes semblables. On note ce polynôme P. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi_{\frac{M_k}{\|M_k\|}} = \det(XI_n - M_k/||M_k||) = \frac{1}{||M_k||^n}\det(||M_k||XI_n - M_k) = \frac{1}{\|M_k\|^n}P(\|M_k\|X).$$

Par continuité de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_A$ (les coefficients de χ_A sont polynomiaux en les coefficients de A), et puisque $\left\|M_{\varphi(k)}\right\| \to +\infty$, et qu'en notant $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$, $\chi_{\frac{M_k}{\|M_k\|}} = X^n + (a_{n-1}/||M_k||)X^{n-1} + ... + (a_0/||M_k||^n)$, on obtient en passant à la limite

$$\chi_N = X^n.$$

C'est bien une caractérisation des matrices nilpotentes.

Solution 3 :

On peut utiliser une orthotrigonalisation.
Une rédaction dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en supposant M_k trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$, et on remplace $O(n)$ par $U(n)$, HP) :
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable et $(e_1, ..., e_n)$ est une base de trigonalisation, alors $(v_1, ..., v_n)$ obtenue à partir de $(e_1, ..., e_n)$ par propriété de Schmidt est orthonormée et trigonalise toujours A car pour tout i, A stabilise $vect(e_1, ..., e_i) = vect(v_1, ..., v_i)$.
Alors P la matrice de passage de la base canonique, orthonormée, à $(v_1, ..., v_n)$ est orthogonale, et $A = PTP^T$ avec T triangulaire supérieure.
On écrit donc $M_k = O_kT_kO_k^T$ avec $O_k \in O(n)$ et T_k triangulaire supérieure.
Du fait de l'hypothèse de similitude, quitte à réordonner les bases, on suppose que les T_k ont toutes les mêmes diagonales.
On écrit $T_k = D + N_k$ avec D diagonale et N_k triangulaire supérieure stricte.
Quitte à extraire, $O(n)$ étant compact, on suppose que $O_k \to O \in O(n)$.

Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in O(n)$, $||AB||_2^2 =< AB, AB >=< B, A^T AB >= ||B||_2^2$, et de même $||BA||_2 = ||B||_2$.
Ainsi $||M_k||_2 = ||T_k||_2$.
Soit $C, S > 0$ telle que $S|| \ ||_2 \leq || \ || \leq C|| \ ||_2$.
$||T_k||_2^2 = ||D||_2^2 + ||N_k||_2^2$ car $< D, N_k >= 0$.
$||N_k|| \leq C||N_k||_2 \leq C||T_k||_2 = C||M_k||_2 \leq (C/S)||M_k||$.
Ainsi $\left(\dfrac{N_k}{||M_k||}\right)$ est bornée en dimension finie, donc on peut extraire une sous-suite convergente vers N, qui va être triangulaire stricte donc nilpotente.
Quitte à extraire, disons $\dfrac{N_k}{||M_k||} \to N$.
Alors $\dfrac{M_k}{||M_k||} = O_k \left(\dfrac{D}{||M_k||} + \dfrac{N_k}{||M_k||}\right) O_k^T \to ONO^T$ nilpotente.

1.14 Exercice 88

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1.
Montrer qu'il existe une norme $|| \ ||$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $|||A||| < 1$.

Très usuel, et par ailleurs important.
On utilise une trigonalisation "ε-adaptée".
Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de trigonalisation de f et $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la diagonale de $Mat_{(e_1,...,e_n)}(f)$.
Si on regarde $Mat_{(e_1,te_2,t^2e_3,...,t^{n-1}e_n)}(f)$, on voit qu'en prenant $t > 0$, on peut rendre les coefficients strictement surdiagonaux aussi petit qu'on veut en module, la diagonale ne changeant pas.
Soit $a = max(|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|) < 1$.
On se donne donc $B = (v_1, ..., v_n)$ base de $\mathbb{C}^n$ telle que $A = Mat_B(f)$ soit triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, et dont tous les coefficients strictement surdiagonaux soient de module $< (1-a)/2n$.
Prenons pour $|| \ ||$ la norme infinie relativement à B : $||\sum_i x_i v_i|| = \max_i |x_i|$.
Alors si $x = \sum_i x_i v_i$, $||f(x)|| = ||A(x_1, ..., x_n)^T||_\infty \leq ((n-1)(1-a)/2n + a)||x|| \leq ((1+a)/2)||x||$, et $(1+a)/2 < 1$.

1.15 Exercice 89

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, ..., L_n$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que, pour tout i, $||L_i||_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j, pour j différent de i, est supérieure ou égale à ε.
Montrer que A est inversible et que $\sup\{||A^{-1}X||_2 \mid X \in \mathbb{R}^n, \ ||X||_1 = 1\} \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

L'hypothèse $||L_i||_2 = 1$ est inutile. d représente la distance euclidienne.
Notons $V_i = vect(\{L_j \mid j \neq i\}$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si A n'était pas inversible, la famille des lignes serait liée, donc il existerait i tel que $L_i \in V_i$, ce qui est impossible car $d(L_i, V_i) \geq \varepsilon > 0$. A est donc inversible.
Notons que $(L_1, ..., L_n)$ étant libre, $\dim(V_i) = n - 1$.
Si $||X||_1 = 1$:
En notant $X = \sum_i x_i \varepsilon_i$: $\sum_i |x_i| = ||X||_1 = 1$.
$||A^{-1}X||_2 = ||\sum_i x_i A^{-1}\varepsilon_i||_2 \leq \sum_i |x_i| \times ||A^{-1}\varepsilon_i||_2 \leq \max_i ||A^{-1}\varepsilon_i||_2$.
Il reste juste à voir que pour tout i, $||A^{-1}\varepsilon_i||_2 \leq 1/\varepsilon$.
Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Notons $Y = A^{-1}\varepsilon_i$. $AY = \varepsilon_i$.
En remplaçant L_k par L_k^T, $AY = \begin{pmatrix} < L_1, Y > \\ \vdots \\ < L_n, Y > \end{pmatrix}$.
On a donc $Y \in V_i^\perp$ et $< L_i, Y >= 1$.
Notons $L_i = C + B$ avec $C \in V_i^\perp$ et $B \in V_i$. $d(L_i, V_i) = ||C||_2 \geq \varepsilon$.
$| < L_i, Y > | = | < C, Y > | = ||C||_2 ||Y||_2$ car Y, C sont dans $V_i^\perp$, de dimension 1, donc colinéaires.
Comme $| < L_i, Y > | = 1$ et $||C||_2 \geq \varepsilon$, on a $||Y||_2 \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

1.16 Exercice 102

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

On va montrer que f est continue en les irrationnels et discontinue en les rationnels.
Soit $a \in \mathbb{R}$.

— Si $a \in \mathbb{Q}$, par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres irrationnels qui converge vers a. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = 0$ et comme $f(a) \neq 0$, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers $f(a)$. Ainsi, f n'est pas continue en a.

— Si $a \in \mathbb{R} \setminus Q$. On fixe $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \geqslant 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(a)| = f(x) \leqslant \varepsilon$. On suppose donc à présent que $\varepsilon < 1$. Alors $A_\varepsilon = \left\{q \in \mathbb{N}^*;\ q < \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ est fini et non vide (partie majorée de $\mathbb{N}$ qui contient 1). On en déduit que $\{r \in \mathbb{Q};\ f(r) \in A_\varepsilon\} \cap [a-1, a+1]$ est fini. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que $\{r \in \mathbb{Q};\ f(r) \in A_\varepsilon\} \cap]a-\delta, a+\delta[= \emptyset$. Alors, pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$, $|f(x) - f(a)| = f(x) \leqslant \varepsilon$ et donc f est continue en a.

1.17 Exercice 103

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a, b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]\,a, b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

Quitte à considérer $x \mapsto f\left((b-)x + a\right) - f(a)$, on peut supposer que $a = 0$, $b = 1$, $f(0) = 0$ et donc $f'(0) = f'(1)$.
On considère alors la fonction $g : x \in]0, 1] \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$, prolongée par continuité en 0 par $f'(0)$. Ainsi, g est dérivable sur $]0, 1]$ et, pour tout $x \in]0, 1]$, $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Pour montrer qu'il existe une tangente passant par le point $(0, f(0))$ il suffit de montrer que g' s'annule. En effet, dans ce cas, il existe $c \in]0, 1]$ tel que $cf'(c) = f(c)$ et donc l'équation de la tangente au point d'abscisse c est $y = (x - c)f'(c) + f(c) = xf'(c)$ donc elle passe par $(0, 0)$.
Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant que g' ne s'annule pas. Alors (Darboux démontré ci-après), g' est de signe strict constant et g est strictement monotone. Si g est strictement croissante, alors $f'(1) = g(1) + g'(1) \geqslant g(1) > g(0) = f'(0)$ donc ceci est absurde. De même, g ne peut pas être strictement décroissante. Ainsi, g' s'annule, ce qui achève la preuve.
Montrons alors ce cas particulier du théorème de Darboux. On suppose donc qu'on dispose d'un fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $g'(a) < 0 < g'(b)$. On veut montrer que si g' n'est pas de signe constant alors g' s'annule. Si $g(a) = g(b)$, le théorème de Rolle donne le résultat. Sinon, sans perdre de généralité, on suppose que $g(a) < g(b)$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in]0, \delta[$, $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} < 0 < \dfrac{g(b) - g(b-h)}{h}$. En particulier, il existe $h > 0$ tel que $g(b) > g(a) > g(a+h)$ et $a < a+h < b$. Comme g est continue, le TVI donne l'existence d'un réel $c \in]a+h, b[$ tel que $g(c) = g(a)$ et on conclut de nouveau avec le théorème de Rolle.

1.18 Exercice 120

On note P l'ensemble des nombres premiers.
$\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est définie par $\Lambda(p^k) = \ln(p)$ si $p \in P$ et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ pour les autres entiers (fonction de von Mangoldt).
Partout, $s > 1$.

1. **Montrer que $\displaystyle\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.**
2. **Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^s}$.**
3. **Montrer que $\displaystyle\sum_{p\in P} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1)$.**
4. **Montrer que $\displaystyle\sum_{p\in P} \frac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?**

Notons d'abord que tous les termes sont positifs, et donc toute sommation par paquets est licite.
Dans la suite, les O sont quand $s \to 1^+$

1. Notons $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en nombres premiers.

   Dans les diviseurs de n, seuls les $p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \in \{1, ..., \alpha_i\}$ contribuent, donc $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln(p_i) = \ln(n)$.

2. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{d\geq 1} \frac{1}{d^s}\right) = \sum_{d,n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{(dn)^s}$ (on distribue la première somme dans la seconde, puis Fubini).
   On regroupe par paquets selon les valeurs de $a = dn$. A a fixé, n décrit les diviseurs de a.
   Donc ceci est égal à $\sum_{a\geq 1}\sum_{n|d} \frac{\Lambda(n)}{a^s}$, ce qui donne avec la question 1, $\sum_{a\geq 1} \frac{\ln(a)}{a^s}$.

3. Par encadrement intégral, sans difficulté, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + O(1)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^s} = \frac{1}{(s-1)^2} + O(1)$ ($\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^s} = \frac{1}{(s-1)^2}$ par IPP).

   Notons $f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$.

   On a donc $f(s)\left(\frac{1}{s-1} + O(1)\right) = \frac{1}{(s-1)^2} + O(1)$, donc $f(s)\left(1 + O(s-1)\right) = \frac{1}{(s-1)} + O(s-1)$.
   $\frac{1}{1+O(s-1)} = 1 + O(s-1)$, donc
   $f(s) = (1 + O(s-1))\left(\frac{1}{(s-1)} + O(s-1)\right) = \frac{1}{(s-1)} + O(1)$.

   D'autre part, de par la définition de Λ, $f(s) = \sum_{p\in P} \frac{\ln(p)}{p^s} + \sum_{p\in P}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(p)}{p^{ks}}$.

   Il reste juste à voir que $\sum_{p\in P}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(p)}{p^{ks}} = O(1)$.

   $0 \leq \sum_{p\in P}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(p)}{p^{ks}} \leq \sum_{n\geq 2}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{ks}} \leq \sum_{n\geq 2}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^k} = \sum_{n\geq 2} \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2}\left(\frac{1}{1-1/n}\right)}_{\sim \ln(n)/n^2 = O(1/n^{3/2})} < \infty$ donne le $O(1)$.

4. $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{n^s}\right) = -\frac{\ln(n)}{n^s}$. On va donc intégrer la relation obtenu en 3 entre s et 2 par exemple, avec $1 < s \leq 2$.
   Les termes étant positifs, l'intégration terme à terme est licite.
   Notons $\sum_{p\in P} \frac{\ln(p)}{p^s} = \frac{1}{s-1} + g(s)$. $g = O(1)$ et est facilement continue sur $]1, 2]$ donc est bornée sur $]1, 2]$.

   L'intégration entre s et 2 donne $-\sum_{p\in P} \frac{1}{p^s} + \sum_{p\in P} \frac{1}{p^2} = -\ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + \int_s^2 g$ et donc

   $\left|\sum_{p\in P} \frac{1}{p^s} - \ln\left(\frac{1}{s-1}\right)\right| \leq \sum_{p\in P} \frac{1}{p^2} + ||g||_{\infty,]1,2]} = cste = O(1)$.

   $\ln\left(\frac{1}{s-1}\right) = o\left(\frac{1}{s-1}\right) = o\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\right)$ donc on constate la raréfaction des nombres premiers $\leq n$ quand $n \to +\infty$. On pourrait donner quelque chose de précis avec ce qui précède (pas $\sim \frac{n}{\ln(n)}$ évidemment...)

1.19 Exercice 122

Soient $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

Le théorème des séries alternées assure l'existence de g.

f est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$ donc $f' \leq 0$ et $\int_0^y f'(t)dt = f(y) - f(0) \underset{y\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} -f(0)$. Ainsi f' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x>0$, posons $A_x = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} [2px,(2p+1)x]$ et $B_x = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} [(2p+1)x,(2p+2)x]$. Notons 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble A quelconque.

Soient $N\in\mathbb{N}$ et $x>0$. On a $\sum_{n=0}^{2N+1}(-1)^n f(nx) = \sum_{p=0}^{N} f(2px)-f((2p+1)x) = -\sum_{n=0}^{N}\int_{2px}^{(2p+1)x} f'(t)dt = \int_0^{(2N+1)} -f'(t)1_{A_x}(t)dt$.
$\int_0^{(2N+1)} -f'(t)1_{A_x}(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} -f'(t)1_{A_x}(t)dt$ donc $g(x) = \int_0^{+\infty} -f'(t)1_{A_x}(t)dt$. ($|f'1_{A_x}|\le |f'|$ donc $f'1_{A_x}$ est intégrable).

Soit $\epsilon>0$. Soit $y>0$ tel que $\int_y^{+\infty} -f'(t)dt\le\epsilon$, autrement dit, $f(y)\le\epsilon$.

Ainsi $f(0)-\epsilon\le\int_0^y -f'(t)dt\le f(0)$ **(1)**. De plus, $\int_0^y -f'(t)dt = \int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt + \int_0^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt$ donc $f(0)-\epsilon \le \int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt + \int_0^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt \le f(0)$ **(2)**.

Montrons à présent que $\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt - \int_0^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt\right) = 0$. $(\star)$.

Démonstration 1 de $(\star)$:
Soit K le plus grand entier de sorte que $2Kx\le y$ i.e. $K=\lfloor \frac{y}{2x}\rfloor$. On a donc
$\int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt = \int_0^{(2K-1)x} -f'(t)1_{A_x}(t)dt + \int_{(2K-1)x}^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt$ et
$\int_0^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt = \int_0^{2Kx} -f'(t)1_{B_x}(t)dt + \int_{2Kx}^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt = \sum_{p=0}^{K-1}\int_{(2p+1)x}^{(2p+2)x} -f'(t)dt + \int_{2Kx}^y -f'(t)dt$.

En effectuant le changement de variable $u=t-x$ on a $\sum_{p=0}^{K-1}\int_{(2p+1)x}^{(2p+2)x} -f'(t)dt = \sum_{p=0}^{K-1}\int_{2px}^{(2p+1)x} -f'(u+x)du = \int_0^{(2K-1)x} -f'(u+t)1_{A_x}(t)dt$.

Ainsi, $\int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt - \int_0^{+\infty} -f'(t)1_{B_x}(t)dt = \int_0^{(2K-1)x} -f'(t)+f'(t+x)1_{A_x}(t)dt + \int_{(2K-1)x}^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt + \int_{2Kx}^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt$.

Nous avons, $2Kx\le y<(2K+2)x$ donc $2Kx>y-2x$ donc $0\le\int_{2Kx}^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt \le \int_{2Kx}^y -f'(t)dt = f(2Kx)-f(y)\le f(y-2x)-f(y)$ et $0\le \int_{(2K-1)x}^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt \le \int_{(2K-1)x}^y -f'(t)dt = f((2K-1)x)-f(y)\le f(y-x)-f(y)$. Comme f est continue, $f(y-2x)-f(y)$ et $f(y-x)-f(y)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 donc $\int_{(2K-1)x}^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt + \int_{2Kx}^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

f' est continue, donc est uniformément continue sur $[0,y]$. Il existe donc il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x>0$ vérifiant $|x|\le\alpha$, $|f'(t+x)-f'(t)|\le\frac{\epsilon}{y}$ et on a alors, $\left|\int_0^{(2K-1)x} -f'(t)+f'(t+x)1_{A_x}(t)dt\right| \le 2Kx\frac{\epsilon}{y}\le\epsilon$, car $2Kx\le y$.

On a donc prouvé $(\star)$.

Démonstration 2 de $(\star)$:
Montrons, en fait, que pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+$ et toute fonction continue g sur $[a,b]$,

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\int_a^b g\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right) = 0. \quad (\star\star)$$

L'idée est que si x tend vers 0, il y a de plus en plus d'alternances entre -1 et 1 : on va adapter la démonstration du lemme de Lebesgue.
On commence donc par prouver $(\star\star)$ dans le cas où g est constante.
Dans ce cas, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $p=\min\{k\in\mathbb{N}\mid kx\ge a\}$ et $q=\max\{k\in\mathbb{N}\mid kx\le b\}$. Par relation de Chasles, on a

$$\int_a^b (1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt = \int_a^{px}(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt + \sum_{k=p}^{q-1}\int_{kx}^{(k+1)x}(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt + \int_{qx}^b (1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt.$$

Or, $|px-a|\leq x$, $|b-qx|\leq x$ et l'intégrande valant 1 ou -1 est dominée par 1 ; on en déduit que

$$\left|\int_a^b (1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|\leq 2x+\left|\sum_{k=p}^{q-1}\int_{kx}^{(k+1)x}(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|.$$

Or

$$\sum_{k=p}^{q-1}\int_{kx}^{(k+1)x}(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt=\sum_{k=p}^{q-1}\varepsilon(-1)^k x$$

avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$ tel que $\varepsilon(-1)^p$ est le signe de $1_{A_x}-1_{B_x}$ sur $[px,(p+1)x]$. Mais $\displaystyle\sum_{k=p}^{q-1}(-1)^k$ vaut -1, 0 ou 1. Il vient donc

$$\left|\int_a^b (1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|\leq 3x.$$

On a bien

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\int_a^b (1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right)=0.$$

On en déduit, par linéarité que $(\star\star)$ est vraie pour les fonctions constantes.
Par relation de Chasles, on peut étendre le résultat aux fonctions en escalier.
Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction en escalier ψ telle que $\|\psi-g\|_\infty\leq\varepsilon$. On a alors, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\left|\int_a^b g\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|\leq\left|\int_a^b (g-\psi)\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|+\left|\int_a^b \psi\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|.$$

$$\left|\int_a^b g\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|\leq(b-a)\varepsilon+\left|\int_a^b \psi\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|.$$

Puisque ψ est en escalier, avec l'étude précédente, il existe $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x\in]0,\eta[$,

$$\left|\int_a^b \psi\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|\leq\varepsilon.$$

Ainsi

$$\left|\int_a^b g\times(1_{A_x}(t)-1_{B_x}(t))dt\right|\leq(b-a)\varepsilon+\varepsilon$$

on a bien montré $(\star\star)$.

Il existe donc $\eta>0$ tel que pour tout $x\in]0,\eta]$, $-\epsilon\leq\displaystyle\int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt-\int_0^y -f'(t)1_{B_x}(t)dt\leq\epsilon$. En utilisant **(2)**, $f(0)-2\epsilon\leq 2\displaystyle\int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt\leq f(0)+2\epsilon$. Enfin, en utilisant $g(x)=\displaystyle\int_0^y -f'(t)1_{A_x}(t)dt+\int_y^{+\infty}-f'(t)1_{A_x}(t)dt$ et $0\leq\displaystyle\int_y^{+\infty}-f'(t)1_{A_x}(t)dt\leq\int_y^{+\infty}-f'(t)(t)dt\leq\epsilon$ on a $-2\epsilon\leq g(x)-\dfrac{f(0}{2}\leq 2\epsilon$. En conclusion $\boxed{\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}g(x)=\frac{f(0)}{2}}$.

1.20 Exercice 125

Soit $R>0$ et f,g développables en série entière sur $]-R,R[$, telles que $\forall x\in]-R,R[$, $\displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)dt=0$. Montrer que $f=0$ ou $g=0$.

Notons $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.

Soit $x\in]-R,R[$. Si $t\in[0,x]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x-t)^n$ converge absolument donc par produit de Cauchy, $f(t)g(x-t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kt^kb_{n-k}(x-t)^{n-k}$.

On justifie une intégration terme à terme, en prenant $x \in [0, R[$, le cas $x \in]-R, 0]$ étant semblable.
Par IPPs, on calcule $\displaystyle\int_0^x \underbrace{t^k(x-t)^{n-k}}_{\geq 0} dt = \frac{k!x^{n+1}}{(n-k+1)(n-k+2)...(n+1)} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}x^{n+1}$
$\displaystyle = \frac{1}{(n+1)C_n^k}x^{n+1} \leq x^{n+1}$.
Donc $\displaystyle\int_0^x |\sum_{k=0}^n a_k t^k b_{n-k}(x-t)^{n-k}|dt \leq \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}|x^{n+1}$, terme général d'une série convergente par produit de Cauchy car $\displaystyle\sum_n |a_n|x^n$ et $\displaystyle\sum_n |b_n|x^n$ convergent (convergence absolue d'une série entière dans le disque ouvert de convergence).
Ainsi on peut intégrer terme à terme et $\displaystyle 0 = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n \frac{k!(n-k)!a_k b_{n-k}}{(n+1)!}\right)x^{n+1}$
Par unicité d'un DSE, ceci étant vrai pour tout $x \in]-R, R[$, $\forall n$, $\displaystyle c_n := \sum_{k=0}^n \frac{k!(n-k)!a_k b_{n-k}}{(n+1)!} = 0$.
Si (a_n) et (b_n) ne sont pas les suites nulles, on se donne p et q minimaux tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
Alors, dans c_{p+q}, tous les termes sont nuls hormis un terme qui est une constante non nulle fois $a_p b_q$, ce qui est absurde ($c_{p+q} = cste \times a_0 b_{p+q} + ... + cste \times a_p b_q + cste \times a_{p+1}b_{q-1} + ...$)

1.21 Exercice 129

Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$.

Supposons l'existence d'une telle partie A de $\mathbb{N}$. Nécessairement A est infinie (sinon on a une contradiction avec des croissances comparées en $+\infty$ entre polynômes et $exp(\sqrt{x})$).

On a $A = \{n_1, n_2, \cdots\}$, (n_k) étant strictement croissante. Posons $\displaystyle f(x) = \sum_{n\in A}\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{n_k}}{n_k!}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle f(n_p) \geq \frac{n_p^{n_p}}{n_p!}$. De plus, selon l'hypothèse sur A, $f(n_p) \underset{p\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{n_p}}$. Or, la formule de Stirling donne $n_p! \sim \sqrt{2\pi n_p}n_p^{n_p}e^{-n_p}$ donc $\displaystyle\frac{n_p^{n_p}}{n_p!} \sim \frac{e^{n_p}}{\sqrt{2\pi n_p}}$. On a donc pour tout p assez grand, $\displaystyle\frac{e^{n_p}}{2\sqrt{2\pi n_p}} \leq f(n_p) \leq \frac{3}{2}e^{\sqrt{n_p}}$. Ainsi $\displaystyle\left(\frac{e^{n_p-\sqrt{n_p}}}{\sqrt{2\pi n_p}}\right)$ est bornée, ce qui est impossible puisque cette suite tend vers $+\infty$. A n'existe donc pas.

1.22 Exercice 155

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique notée $|| \ ||$ et on note B la boule unité fermée de cet espace.
Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que pour tout $(u, v) \in B$, $||df_u(v) - (v - f(0))|| \leq 1/2$.
Montrer que f s'annule exactement une fois sur B.

Montrons déjà que si $x \in B$, $||f(x) - x|| \leq 1/2$:
Si $x \in B$, $\displaystyle f(x) = f(0) + \int_0^1 df_{tx}(x)dt = f(0) + \int_0^1 (x - f(0)) + h(t)dt$ avec $||h(t)|| \leq 1/2$.
Donc $\displaystyle ||f(x) - x|| = ||\int_0^1 h(t)dt|| \leq \int_0^1 ||h|| \leq 1/2$.
Notons $g(x) = ||f(x)||^2$.
g est continue sur le compact B, donc admet un minimum.
Avec $v = 0$, $||f(0)|| \leq 1/2$, et avec l'inégalité précédente, si $x \in \partial B$, $||f(x)|| \geq 1/2$.
Donc $\min_B g \leq 1/4$. Si c'est $1/4$, il est atteint en 0, sinon, il est atteint dans l'intérieur de B.
Dans tous les cas il est atteint dans l'intérieur de B.
Soit donc $a \in \mathring{B}$ en lequel $\min_B g$ est atteint.
$dg_a = 0$ ie $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $< df_a(h), f(a) >= 0$.
Si on montre que df_a est inversible, on aura $f(a) \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ soit $f(a) = 0$.
Il suffit de montrer que df_a est injective.
Si ce n'était pas le cas, ou pourrait se donner $h \in Ker(df_a)$ de norme 1. On a aussi $df_a(-h) = 0$.
Alors $||h - f(0)|| \leq 1/2$ et $||-h - f(0)|| \leq 1/2$ ce qui est impossible cas $S(f(0), 1/2)$ est de diamètre 1, et $||h - (-h)|| = 2$.

Il reste à voir l'unicité.
Supposons que $a, b \in B$ sont tels que $f(a) = f(b) = 0$ et $a \neq b$.
Alors $0 = \displaystyle\int_0^1 df_{(1-t)a+tb}(b-a)dt = ||a-b|| \int_0^1 df_{(1-t)a+tb}\left(\frac{b-a}{||b-a||}\right) dt$.
$df_{(1-t)a+tb}\left(\dfrac{b-a}{||b-a||}\right) = \dfrac{b-a}{||b-a||} - f(0) + h(t)$ avec $||h(t)|| \leq 1/2$.
On a donc $\dfrac{b-a}{||b-a||} = f(0) - \displaystyle\int_0^1 h$. Comme $||f(0)|| \leq 1/2$ et $||h|| \leq 1/2$, on a nécessairement $f(0) = \dfrac{b-a}{2||b-a||}$, et h constante égale à $\dfrac{b-a}{2||b-a||}$ (cas d'égalité dans des inégalités triangulaires)
En échangeant les rôles de a et b, $f(0) = \dfrac{a-b}{2||b-a||}$, donc $a-b = b-a$ ie $a = b$, absurde.

1.23 Exercice 157

Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité.

En assimilant canoniquement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, les isométries affines sont de deux types :
$f_{\theta,b} : z \mapsto e^{i\theta}z + b$, et $g_{\theta,b} : z \mapsto e^{i\theta}\overline{z} + b$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$.
Les $f_{\theta,b}$ correspondent aux éléments ayant une partie linéaire dans $SO(\mathbb{R}^2)$, ie une rotation.
Les $g_{\theta,b}$ correspondent aux éléments ayant une partie linéaire dans $O^-(\mathbb{R}^2)$, ie une réflexion.
Si $e^{i\theta} \neq 1$, $f_{\theta,b}$ (homothétie) a un unique point fixe (son centre).
• Si G contient une homothétie différente de l'identité :
Soit $g_1 = f_{\theta,b}$ une telle homothétie.
Si $e^{i\theta} = 1$, g_1 est une translation et c'est fini.
Sinon, g_1 a un unique point fixe w.
Soit $g_2 \in G$ tel que $g_2(w) \neq w$.
Soit $g_3 = g_2 g_1 g_2^{-1}$.
g_3 est une homothétie de centre $g_2(w) \neq w$.
Soit alors $g_4 = g_1^{-1} g_3 g_1 g_3^{-1}$. g_4 est facilement une translation.
Si $g_4 = id$, $g_1 = g_3 g_1 g_3^{-1}$ donc $g_3(w)$ est fixe par g_1, donc $g_3(w) = w$, ce qui est faux, donc g_4 est une translation différente de l'identité.
• Sinon : $G \backslash \{id\}$ ne contiendrait que des $g_{\theta,b}$.
Mais la composée de deux tels éléments est une homothétie, donc on aurait $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 g_2 = id$.
Alors on aurait $G = \{id, g, g^{-1}\}$ avec $g^2 = id$.
g^{-1} a les mêmes points fixes que g, donc g devrait n'avoir aucun point fixe sans quoi l'hypothèse sur G ne serait pas respectée.
Notons $g(z) = e^{i\theta}\overline{z} + b$. $g^2(z) = z + e^{i\theta}\overline{b} + b$.
$g^2 = id$ donne donc $e^{i\theta}\overline{b} + b = 0$, soit $Re(e^{-i\theta/2}b) = 0$.
Alors $g(z) = z \iff e^{i\theta/2}\overline{z} - e^{-i\theta/2}z = -e^{-i\theta/2}b \iff 2iIm(e^{i\theta/2}\overline{z}) = -e^{-i\theta/2}b$, donc g a une infinité de points fixes.

1.24 Exercice 158

Soit S le groupe des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ du type $z \mapsto az + b$ avec $|a| = 1$.
Soit G un sous-groupe de S vérifiant :
• **Si $g \in G$, $g(0) = 0$ ou $|g(0)| \geq 1$.**
• **L'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b \in G$ contient deux éléments $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.**

Montrer que $\{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C};\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

Notons $f_{a,b} : z \mapsto az + b$ pour $|a| = 1$, $H = \{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C};\ z \mapsto az + b \in G\}$, et $F = \{g(0) \mid g \in G\}$.
$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,?}$, $f_a^{-1} = f_{a^{-1},?}$, donc H est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.
Supposons par l'absurde H infini. Alors H est classiquement dense dans $\mathbb{U}$.
On peut le montrer en se ramenant aux sous-groupes de $\mathbb{R}$:
Soit $V = \{\theta \in \mathbb{R} \mid e^{i\theta} \in H\}$. V est facilement un sous groupe de $\mathbb{R}$.
H étant infini, $V \cap [0, 2\pi[$ est infini, donc V ne peut être de la forme $\delta\mathbb{Z}$, donc est dense dans $\mathbb{R}$, et donc par continuité et surjectivité de $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, H est dense dans $\mathbb{U}$.
Soient a, b $\mathbb{R}$-linéairement indépendants tels que $f_{1,a},\ f_{1,b} \in G$.
Par densité de H, on se donne $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $|(e^{i\theta} - 1)b| \leq 1/10$, et $|(e^{i\theta} - 1)a| \leq 1/10$.
Notons $a' = (1 - e^{i\theta})a$, et $b' = (1 - e^{i\theta})b$. La $\mathbb{R}$-liberté de (a, b) entraîne immédiatement celle de (a', b').

On se donne c tel que $f_{e^{i\theta},c} \in G$.
Si $m, n \in \mathbb{Z}$, $f_{1,a}^{-m} f_{1,b}^{-n} f_{e^{i\theta},c} f_{1,a}^{m} f_{1,b}^{n}(z) = e^{i\theta}z - ma' - nb' + c$.
Donc, comme $f_{1,a}^{-m} f_{1,b}^{-n} f_{e^{i\theta},c} f_{1,a}^{m} f_{1,b}^{n} \in G$, $-ma' - nb' + c \in F$.
Donc F contient $\mathbb{Z}a' + \mathbb{Z}b' + c$.
$c + \mathbb{Z}a' + \mathbb{Z}b'$ est le translaté par c du réseau $\mathbb{Z}a' + \mathbb{Z}b'$, engendré par le parallélogramme non plat $(0, a', a' + b', b')$ de côtés de longueurs $\leq 1/10$, donc facilement, tout complexe est à une distance $\leq 1/10$ d'un point de $c + \mathbb{Z}a' + \mathbb{Z}b'$.
Ainsi par exemple, F contient un élément w tel que $|w - 1/2| \leq 1/10$.
Alors $0 < |w| \leq 1/2 + 1/10 < 1$, ce qui contredit la deuxième hypothèse.

1.25 Exercice 165

Soient $m \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement ≪le morphisme φ est surjectif≫.

Pour tout entier k entre 1 et r, on note $e_k = (\delta_{k,i})_{1 \leqslant i \leqslant r}$. Alors, tout morphisme $\varphi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est caractériser par la donnée du r-uplet $(\varphi(e_1, \ldots, e_r)$.
On en déduit que $\boxed{\sharp\{\varphi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z};\ \varphi \text{ morphisme de groupe}\} = m^r}$.
On note alors A l'événement ≪ φ est un morphisme de groupe surjectif ≫. Un tel morphisme φ est surjectif ssi $1 \in \mathrm{Im}(\varphi)$ ssi $\exists (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r;\ a_1\varphi(e_1) + \cdots a_r\varphi(e_r) \equiv 1[m]$.
Ainsi, φ est non surjectif ssi il existe d diviseur de m tel que, pour tout k, d divise $\varphi(e_k)$ ou encore ssi il existe un nombre premier p tel que $p|m$ et $\forall 1 \leqslant k \leqslant r,\ p|\varphi(e_k)$.
Or si p est un diviseur premier de m, $\{dp;\ dp \leqslant m\}$ est de cardinal $\dfrac{m}{p}$ donc, en notant B_p l'événement ≪ φ est tel que pour tout k, $p|\varphi(e_k)$ ≫ on obtient que $\mathbb{P}(B_p) = \dfrac{(m/p)^r}{m^r} = \dfrac{1}{p^r}$ (loi uniforme). De plus, si p et q sont deux diviseurs premiers de m distincts, $pq|\varphi(e_k)$ ssi $p|\varphi(e_k)$ et $q|\varphi e_k$ donc $\mathbb{P}(B_{pq}) = \dfrac{1}{p^r q^r} = \mathbb{P}(B_p)\mathbb{P}(B_q)$. On généralise au produit des diviseurs premiers de m pour obtenir que les événements $(B_p;\ p|m)$ sont mutuellement indépendants. Il en est donc de même pour la famille des événements contraires que l'on note A_p.
Finalement, comme $A = \displaystyle\bigcap_{p|m} A_p$ on obtient que $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\prod_{p|m} \mathbb{P}(A_p) = \prod_{p|m}\left(1 - \frac{1}{p^r}\right)$ où les indices p sont premiers.

1.26 Exercice 168

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $E(X) = 1$, $E(X^2) = 2$ et $E(X^3) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $P(X = 0)$?

Tout d'abord, vu que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, rechercher la valeur minimale de $P(X = 0)$ revient à la recherche de la valeur maximale de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)$.

On commence par résoudre le système suivant, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:
$\left\{\begin{array}{lcl} a + 2b + 3c & = & 1 \\ a + 4b + 9c & = & 2 \\ a + 8b + 27c & = & 5 \end{array}\right.$. On obtient comme solution $(a, b, c) = (1/2, 0, 1/6)$. On déduit qu'une variable aléatoire notée X_1 de sorte que $P(X_1 = 0) = 1/3$ $P(X_1 = 1) = 1/2$, $P(X_1 = 2) = 0$, $P(X_1 = 3) = 1/6$ et pour tout $k \geq 4$, $P(X = k) = 0$ est telle que $E(X_1) = 1$, $E(X_1^2) = 2$ et $E(X_1^3) = 5$ et donc la borne supérieure recherchée est supérieure à $2/3$.

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = P(X = k)$. Nous avons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k = 1$ **(1)** , $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k = 2$ **(2)** et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^3 a_k = 5$ **(3)**.

(2)-**(1)** et **(3)**-**(1)** donne : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 - k)a_k = 1$ **(4)** et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (k^3 - k)a_k = 4$ **(5)**.

(4)-3× **(1)** donne $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} (k^3 - 3k^2 + 2k)a_k = 1$.

Ceci donne : $a_3 = 1/6 - 1/6 \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} (k^3 - 3k^2 + 2k)a_k$, $a_2 = 1/2 - 3a_3 - 1/2 \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} (k^2 - k)a_k$, $a_1 = 1 - 2a_2 - 3a_3 - \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} ka_k$.

On a alors, en exprimant, a_1, a_2 en fonction de a_3 et des a_k, $k \geq 4$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{k=4}^{+\infty} a_k = 2/3 - 1/6 \sum_{k=4}^{+\infty}(k^3 - 6k^2 + 11k - 6)a_k$.

On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 12x + 11$. P' admet deux racines notée x_1 et x_2 : $x_1 = \dfrac{-\sqrt{23}+12}{6}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{23}+12}{6}$. On vérifie que $x_2 < 4$. Vu que $P' > 0$ sur $[4, +\infty[$, P est stricterment croissante sur $[4, +\infty[$, et $P(4) = 6$ donc $P > 0$ sur $[4, +\infty[$. On déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 \geq 0$ et comme $a_k \geq 0$, pour tout k, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq 2/3$. Et la variable aléatoire X_1 nous permet de conclure que cette borne supérieure est un maximum qui vaut $2/3$. En conclusion, la valeur minimale de $P(X = 0)$ vaut $1/3$.

1.27 Exercice 189

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G.
Montrer que $\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|) \leqslant \dfrac{nd}{2} \max_{s \in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|)$.

Avec la formule de transfert et en utilisant que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(G)$, on a les relations suivantes :

$$\mathbf{E}[f(X)] = \frac{1}{n^d} \sum_{g \in G} f(g), \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))| \leqslant \frac{1}{n^{2d}} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} |f(h) - f(g)| =: A$$

(par inégalité triangulaire).
On a également, pour tout $s \in S$, $\mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)| = \dfrac{1}{n^d} \displaystyle\sum_{g \in G} |f(g+s) - f(g)|$ dont on note M le maximum quand s parcourt S.
Comme $u \in G \mapsto g + u$ est une bijection on peut réécrire la double somme A comme étant $\dfrac{1}{n^{2d}} \displaystyle\sum_{g \in G} \sum_{u \in G} |f(g+u) - f(g)|$ puis avec Fubini,

$$A = \frac{1}{n^{2d}} \sum_{u \in G} \sum_{g \in G} |f(g+u) - f(g)| \frac{1}{n^2} \sum_{u \in G} \left(\frac{1}{n^d} \sum_{g \in G} |f(g+u) - f(g)| \right).$$

De plus, tout élément u de G peut s'écrire $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i u_i e_i$ avec $\epsilon_i = \pm 1$ et $u_i \in [\![0, n/2]\!]$. Ainsi, la différence $f(g+u) - f(g)$ peut être « découpée » en un somme de termes de la forme $f(h+s) - f(h)$ avec $s \in S$ et le nombre de termes est majoré par $\dfrac{nd}{2}$, d'où, par inégalité triangulaire,

$$\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))| \leqslant \frac{1}{n^d} \sum_{u \in G} \frac{nd}{2} M = \frac{nd}{2} M = \frac{nd}{2} \max_{s \in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|).$$

1.28 219 - ENS-PC

Soit A une partie de cardinal n de $\mathbb{R}$. On pose $B = A + A = \{a + a', a, a' \in A\}$. Montrer que $2n - 1 \leq$ Card$(B) \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$. Généraliser à $B = kA = A + A + \cdots + A$ (k fois).

Notons $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. **Cas** $2A$
   On a $B = 2A = \{a_i + a_j, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\}$.
   (a) Majoration.
      i. Obtention de la majoration.
         On a :
$$B = \{a_i + a_j, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\} = \{a_i + a_j, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ avec } i \leq j\}$$

car, pour $i > j$, $a_i + a_j = a_j + a_i$ avec $j < i$.

Donc :

$$\mathrm{Card}(B) \leq \mathrm{Card}\left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ avec } i \leq j\right\} = \frac{n(n+1)}{2}$$

ii. Optimalité de la majoration.

Prenons $A = \left\{3^0 = 1, 3^1 = 3, \dots, 3^{n-1}\right\}$ de cardinal n.

Alors :

$$\begin{aligned} B &= \left\{3^{i-1} + 3^{j-1}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ avec } i \leq j\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 3^{i-1} \text{ avec } \alpha_i \in [\![0,2]\!] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\right\} \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en base 3 d'un entier, tous les éléments écrits sont deux à deux distincts donc $\mathrm{Card}(B) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et la majoration est optimale.

(b) Minoration.

i. Obtention de la minoration.

Dans l'ensemble B, on a les $2n-1$ éléments suivants :

$$a_1 + a_1 < a_1 + a_2 < \cdots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < a_3 + a_n < \cdots < a_{n-1} + a_n < a_n + a_n$$

Ainsi $2n - 1 \leq \mathrm{Card}(B)$.

ii. Optimalité de la minoration.

Prenons $A = \{1, \dots, n\}$ alors $B \subset [\![2, 2n]\!]$ donc $\mathrm{Card}(B) \leq 2n-1$ et, avec la minoration obtenue, $\mathrm{Card}(B) = 2n-1$. Ainsi la minoration est optimale.

2. **Cas général kA, $k \geq 2$**

(a) Majoration.

On rappelle que le nombre de combinaisons avec répétition à k éléments d'un ensemble à n éléments vaut :

$$\Gamma_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

En effet :

Notons a_1, …, a_n les n éléments.

La combinaison avec répétition à k éléments où a_1 est choisi α_1 fois, a_2 est choisi α_2 fois, … avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$ peut être codée par la liste suivante de k étoiles et $n-1$ barres verticales : α_1 étoiles, une barre, α_2 étoiles, une barre, … , une barre, α_n étoiles.

Le nombre de tels codes est égal au nombre de choix pour les k emplacements des étoiles, parmi les $n+k-1$ emplacements de la liste. On trouve alors bien le nombre de combinaisons avec répétition de k éléments d'un ensemble à n éléments : $\Gamma_k^n = \dbinom{n+k-1}{k}$.

i. Obtention de la majoration.

On a :

$$kA = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \text{ avec } \alpha_i \in [\![0,k]\!] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k\right\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des sommes de k termes de A, c'est-à-dire l'ensemble des sommes de toutes les combinaisons avec répétition de k éléments de A. Ainsi :

$$\mathrm{Card}(kA) \leq \Gamma_k^n$$

ii. Optimalité de la majoration.

Prenons $A = \left\{(k+1)^0 = 1, (k+1)^1 = k+1, \dots, (k+1)^{n-1}\right\}$ de cardinal n.

Alors :

$$kA = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (k+1)^{i-1} \text{ avec } \alpha_i \in [\![0,k]\!] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k\right\}$$

Par unicité de la décomposition en base $k+1$ d'un entier, tous les éléments écrits sont deux à deux distincts donc $\mathrm{Card}(kA) = \Gamma_k^n$ et la majoration est optimale.

(b) Minoration.

i. Obtention de la minoration.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: $\mathrm{Card}(kA) \geq kn - k + 1$.

— $\mathcal{P}(1)$ est clairement vraie.

— $\mathcal{P}(2)$ a été vue.

— Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On a clairement $(k+1)A = A + kA$.

Notons $kA = \{b_1, \dots, b_m\}$ avec $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$ avec $m = \mathrm{Card}(kA) \geq kn - k + 1$ par $\mathcal{P}(k)$.

Alors dans l'ensemble $(k+1)A = A + kA$, on a les $n + m - 1$ éléments suivants :

$$a_1 + b_1 < a_1 + b_2 < \cdots < a_1 + b_m < a_2 + b_m < \cdots < a_n + b_m$$

Ainsi $\mathrm{Card}((k+1)A) \geq m + n - 1 \geq kn - k + 1 + n - 1 = (k+1)n - (k+1) + 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

— Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}(kA) \geq kn - k + 1$.

ii. Optimalité de la minoration.

Prenons $A = \{1, \dots, n\}$ alors $kA \subset [\![k, kn]\!]$ donc $\mathrm{Card}(kA) \leq kn - k + 1$ et, avec la minoration obtenue, $\mathrm{Card}(kA) = kn - k + 1$. Ainsi la minoration est optimale.

1.29 220 - ENS-PC

Soient a et $b \in \mathbb{Z}$ deux entiers distincts. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(a) = b$ et $P(b) = a$.

Posons $P_0 = -X + a + b$, on a $P_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et $P_0(a) = b$ et $P_0(b) = a$.

— Analyse.

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(a) = b$ et $P(b) = a$.

Posons $F = P - P_0$: F est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et a et b sont racines de F donc F est divisible par $(X - a)(X - b)$: il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $F = (X - a)(X - b)Q$. Mais, dans l'algorithme de la division euclidienne, $(X - a)(X - b)$ étant unitaire, Q est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Finalement, $P = P_0 + (X - a)(X - b)Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$.

— Synthèse.

Soit $P = P_0 + (X - a)(X - b)Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Alors $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $P(a) = b$ et $P(b) = a$.

Ainsi l'ensemble solution du problème est $P_0 + (X - a)(X - b)\mathbb{Z}[X]$.

1.30 222 - ENS-PC

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de l'application $\Phi : M \in E \longmapsto M^T \in E$.

On sait que :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Prenons une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ que l'on juxtapose avec une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(S) = S^T = S$ et, si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = A^T = -A$, donc, la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale avec sur sa diagonale $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ avec $\dfrac{n(n+1)}{2}$ fois le 1 et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ fois le -1.

Ainsi $\det(\Phi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

1.31 223 - ENS-PC

Considérons des réels $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$. Montrer qu'il existe des réels α_0, …, α_n tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(x_k)$.

Pour $i \in [\![0, n]\!]$, posons :

$$f_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(x_i) \end{array}$$

1. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, f_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})}$.

   Posons $(L_0, \ldots, L_n)$ les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, interpolateurs de Lagrange en les points $(x_0, \ldots, x_n)$. Alors, pour $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\lambda_i = (\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n)(L_i) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})}(L_i) = 0$$

   Ainsi $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$, qui est de dimension $n+1$ donc c'en est une base.

3. Ainsi, posant :

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P \end{array}$$

   qui est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, f se décompose (de façon unique) dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$: il existe des (uniques) réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que $f = \alpha_0 f_0 + \cdots + \alpha_n f_n$, c'est-à-dire tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(x_k)$.

1.32 224 - ENS-PC

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si $A + iB \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in GL_n(\mathbb{R})$.

2. Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Supposons $A + iB \in GL_n(\mathbb{C})$.

   Posons :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \det(A + zB) \end{array}$$

   f est une fonction polynomiale (un polynôme).

   Si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A + tB \notin GL_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \det(A + tB) = 0$ donc f a une infinité de racines donc est nul, et donc $0 = f(i) = \det(A + iB)$, ce qui est absurde car $A + iB \in GL_n(\mathbb{C})$.

   Ainsi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in GL_n(\mathbb{R})$.

2. Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$, c'est-à-dire $AP = PB$.

   Posons $P = P_1 + iP_2$ avec P_1 et $P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices parties réelles et parties imaginaires de P.

   Alors $AP_1 + iAP_2 = AP = PB = P_1B + iP_2B$ donc $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$.

   À l'aide de la question précédente, soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $Q = P_1 + tP_2 \in GL_n(\mathbb{R})$.

   Alors $AQ = AP_1 + tAP_2 = P_1B + tP_2B = BQ$ et, Q étant inversible : $A = QBQ^{-1}$ avec $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ donc A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.33 225 - ENS-PC

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Dans $\mathbb{C}$, $X^k - 1$ est scindé, à racines simples et, comme ce polynôme est annulateur de M, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec ses valeur propres complexes racines de $X^k - 1$, c'est-à-dire des racines k-èmes de l'unité. Sachant aussi, que M étant réelle, si un complexe, non réel est valeur propre de M, son conjugué l'est aussi.

Ainsi, dans $\mathcal{C}$, M est semblable à D avec D de la forme :

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} e^{\frac{2ip\pi}{k}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2ip\pi}{k}} \end{pmatrix} \text{ avec } p \in \left[\!\!\left[0, \frac{k-1}{2}\right]\!\!\right] \text{ et } e^{\frac{2ip\pi}{k}} \text{ non réel}$$

Dans ce cas, $\dfrac{2p\pi}{k} \in]0, \pi[$

1. si D est de la première forme $D^{12} = I_2$ et donc $M^{12} = I_2$.

2. si D est de la seconde forme :
$$2\cos\left(\frac{2p\pi}{k}\right) = \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{Z}$$
avec $2\cos\left(\frac{2p\pi}{k}\right) \in]-2,2[$.
— si $\cos\left(\frac{2p\pi}{k}\right) = 0$ alors $\frac{2p\pi}{k} = \frac{\pi}{2}$ et $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ donc $D^{12} = I_2$ et donc $M^{12} = I_2$.
— si $\cos\left(\frac{2p\pi}{k}\right) = \frac{1}{2}$ alors $\frac{2p\pi}{k} = \frac{\pi}{3}$ et $D = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{pmatrix}$ donc $D^{12} = I_2$ et donc $M^{12} = I_2$.
— si $\cos\left(\frac{2p\pi}{k}\right) = -\frac{1}{2}$ alors $\frac{2p\pi}{k} = \frac{4\pi}{3}$ et $D = \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}$ donc $D^{12} = I_2$ et donc $M^{12} = I_2$.

Ainsi, dans tous les cas, $M^{12} = I_2$.

1.34 228 - ENS-PC

Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{tr}(A) = 3$, $\mathbf{tr}(A^2) = 5$, $\mathbf{tr}(A^3) = 9$. Déterminer la borne inférieure de $\mathbf{tr}(M^2)$ lorsque M décrit $\left\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \mathbf{tr}(AM) = 1 \text{ et } \mathbf{tr}(A^2M) = 1\right\}$.

Notons $\Omega = \left\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(A^2M) = 1\right\}$.

— Par le théorème spectral, A est diagonalisable en base orthonormée : il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1} = PDP^T$ avec $D = Diag(a, b, c)$.

On sait alors que $a+b+c = \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(A) = 3$, $a^2+b^2+c^2 = \operatorname{tr}(D^2) = \operatorname{tr}(A^2) = 5$ et $a^3+b^3+c^3 = \operatorname{tr}(D^3) = \operatorname{tr}(A^3) = 9$.

— Remarquons que :
$$2(ab+ac+bc) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) = 3^2 - 5 = 4$$
$$6abc = (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) - 3(ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c)$$
avec
$$ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3) = 3.5 - 9 = 6$$
et donc :
$$6abc = 3^3 - 9 - 3.6 = 0$$

On a :
$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$$

Ainsi, quitte à réordonner les valeurs propres, on peut supposer que $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$.

— Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons $M' = P^{-1}MP = P^TMP$.

Lorsque M décrit $\Omega = \left\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(A^2M) = 1\right\}$, M' décrit $\Omega' = \left\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(DM) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(D^2M)\right.$

En effet :
— si $M \in \Omega$. Alors M' est symétrique, en effet : $M'^T = (P^TMP)^T = P^TM^TP = M'$. De plus, $1 = \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(PDP^TPM'P^T) = \operatorname{tr}(DM')$, $1 = \operatorname{tr}(A^2M) = \operatorname{tr}(PD^2P^TPM'P^T) = \operatorname{tr}(D^2M')$.
— si $M' \in \Omega'$, on montre de même que $M \in \Omega$.

De plus, dans ce cas, $\operatorname{tr}(M^2) = \operatorname{tr}(M'^2)$.

On cherche donc à déterminer la borne inférieure de $\operatorname{tr}(M'^2)$ lorsque M' décrit $\Omega' = \left\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(DM) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(D^2M)\right.$

En un mot, on s'est ramené au cas particulier où A est diagonale.

— Notons $M' = \begin{pmatrix} x & u & v \\ u & y & w \\ v & w & z \end{pmatrix}$ alors $M'^2 = \begin{pmatrix} x^2+u^2+v^2 & xu+uy+vw & xv+uw+vf \\ xb+uy+vw & u^2+y^2+w^2 & uv+yw+wz \\ xv+uw+vz & uv+yw+wz & v^2+w^2+z^2 \end{pmatrix}$.

On cherche (x, y, z, u, v, w) avec $1 = ax+by+cz = y+2z$ et $1 = a^2x+b^2y+c^2z = y+4z$ tel que $x^2+y^2+z^2+2u^2+2v^2+2w^2$ soit minimal.

— Evidemment, on choisit déjà $u = v = w = 0$, donc on cherche à minimiser $x^2+y^2+z^2$.
— Les deux premières équations définissent chacune un plan affine de $\mathbb{R}^3$ donc ensemble, les deux équations définissent une droite affine D de $\mathbb{R}^3$, chercher à minimiser $x^2+y^2+z^2$ lorsque (x, y, z) varie dans D revient à chercher le carré de la distance de $(0,0,0)$ à D. Rédigeons cela.
— Le vecteur $u_1 = (0,1,2)$ est non nul et normal au plan P_1 d'équation $y+2z = 1$.

Le vecteur $u_2 = (0,1,4)$ est non nul et normal au plan P_2 d'équation $y+4z = 1$.

u_1 et u_2 sont non colinéaires donc P_1 et P_2 ne sont pas parallèles et leur intersection est donc une droite D dirigée par $w = (1,0,0)$, qui est un vecteur orthogonal à u_1 et u_2, droite passant par le point $W = (0,1,0)$.

— Il est alors clair que la distance de $(0,0,0)$ à D vaut 1 (la configuration est évidente) mais nous allons la calculer par deux méthodes ci-dessous.

— Notons $O=(0,0,0)$ et R le projeté orthogonal de O sur D.

Le minimum cherché m est $\|\overrightarrow{OR}\|^2$.

Or :

$$\left\|\overrightarrow{OW}\wedge w\right\|^2=\left\|(\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RW})\wedge w\right\|^2=\left\|\overrightarrow{OR}\wedge w+\overrightarrow{RW}\wedge w\right\|^2$$
$$=\left\|\overrightarrow{OR}\wedge w+\overrightarrow{0}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{OR}\right\|^2\|w\|^2=m$$

car $\overrightarrow{RW}$ est colinéaire à w et $\overrightarrow{OR}$ est orthogonal à w.

Or

$$\left\|\overrightarrow{OW}\wedge w\right\|^2=\|(0,0,-1)\|^2=1$$

Ainsi $m=1$.

— On aurait aussi pu dire que la distance de O à la droite D passant par W dirigée par w est aussi la distance de W à la droite Δ passant par O (c'est une droite vectorielle) et dirigée par w, qui n'est autre que $\mathrm{Vect}(w)$.
w étant unitaire, (w) est une base orthonormée de Δ et le projeté orthogonal sur Δ de W est $p_\Delta(W)=0.w=\overrightarrow{0}$ et donc $m^2=\|W-p_\Delta(W)\|^2=\|(0,1,0)\|^2=1$.

1.35 237 - ENS-PC

Quelle est la nature de la série $\sum\sin(2\pi n!e)$?

— On a :

$$e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

donc :

$$n!e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n!}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{n!}{(n+p)!}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\dots n+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\dots(n+p)}=a_n+b_n$$

— On a $a_n\in\mathbb{N}$, ainsi :

$$\sin(2\pi n!e)=\sin(2\pi a_n+2\pi b_n)=\sin(2\pi b_n)$$

— On a :

$$\frac{1}{n+1}\leq b_n=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\dots(n+p)}\leq\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)}\right)^p=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}$$

car on a une série géométrique de raison $\dfrac{1}{n+1}\in]-1,1[$ donc convergente.

Ainsi :

$$\frac{n}{n+1}\leq nb_n\leq 1$$

Par le théorème des gendarmes, $nb_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ donc $b_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.

— Ainsi

$$\sin(2\pi n!e)=\sin(2\pi b_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\pi b_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\pi}{n}$$

Ainsi, par le critère des séries de Riemann et par comparaison des séries à termes positifs, $\sum\sin(2\pi n!e)$ diverge.

1.36 239 - ENS-PC

Nature, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\sum |\sin(2\pi n!e)|^\alpha$.

— On a :

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

donc :

$$n!e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+p)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\dots n + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} = a_n + b_n$$

— On a $a_n \in \mathbb{N}$, ainsi :

$$\sin(2\pi n!e) = \sin(2\pi a_n + 2\pi b_n) = \sin(2\pi b_n)$$

— On a :

$$\frac{1}{n+1} \le b_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} \le \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)}\right)^p = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}$$

car on a une série géométrique de raison $\dfrac{1}{n+1} \in]-1,1[$ donc convergente.

Ainsi :

$$\frac{n}{n+1} \le nb_n \le 1$$

Par le théorème des gendarmes, $nb_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

— Ainsi

$$\sin(2\pi n!e) = \sin(2\pi b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n}$$

et, donc

$$|\sin(2\pi n!e)|^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^\alpha$$

Ainsi, par le critère des séries de Riemann et par comparaison des séries à termes positifs, $\sum |\sin(2\pi n!e)|^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1.37 271 - ENS-PC

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que $P(X_1 = 0)P(X_1 = 1) \neq 0$.
$S_n = X_1 + ... + X_n$.
Montrer que $P(4 \text{ divise } S_n) \to \dfrac{1}{4}$.

Abrégeons $S_n \equiv k[4]$ en $S_n \equiv k$.
Notons $a_n = P(S_n \equiv 0)$, $b_n = P(S_n \equiv 1)$, $c_n = P(S_n \equiv 2)$, $d_n = P(S_n \equiv 3)$.
$E(e^{i\pi S_n/2}) = a_n + ib_n - c_n - id_n$.
D'autre part, par lemme des coalitions et indépendance, $E(e^{i\pi S_n/2}) = (E(e^{i\pi X_1/2}))^n$.
$E(e^{i\pi X_1/2}) = P(X_1 = 0) + iP(X_1 = 1) + ...$
$|E(e^{i\pi X_1/2})| \le \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k) = 1$, mais l'inégalité est stricte car les deux premiers termes, $P(X_1 = 0)$ et $iP(X_1 = 1)$ sont non positivement liés.
Ainsi $E(e^{i\pi S_n/2}) \to 0$, et donc $a_n - c_n \to 0$, et $b_n - d_n \to 0$.
Les mêmes considérations avec $E(e^{i\pi S_n}) = a_n + c_n - b_n - d_n$ donnent $a_n + c_n - b_n - d_n \to 0$. ($P(X_1 = 0)$ et $-P(X_1 = 1)$ ne sont pas positivements liés)
En rajoutant $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$, on peut conclure que les quatre suites convergent vers $1/4$.
En effet, notons $\varepsilon_n = a_n - c_n \to 0$ et $\delta_n = b_n - d_n \to 0$.
Alors $2a_n - \varepsilon_n - (2b_n - \delta_n) \to 0$, donc $a_n - b_n \to 0$. Soit $\beta_n = a_n - b_n \to 0$.
$1 = a_n + b_n + c_n + d_n = 2a_n - \varepsilon_n + 2b_n - \delta_n = 4a_n - \varepsilon_n - \delta_n - 2\beta_n$, donc $a_n \to 1/4$.

2 Polytechnique

2.1 Exercice 277

Déterminer les solutions de $a^2 - 2b^2 = \pm 1$

Il s'agit d'une équation de Pell Fermat (encore...)
Sans avoir entendu parler de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et des inversibles, il est difficile de dire beaucoup de choses.
Soit $G = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. C'est immédiatement un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
Par irrationalité de $\sqrt{2}$, il y a unicité de l'écriture des éléments.
Si $z = a + \sqrt{2}b \in G$, on pose $\overline{z} = a - \sqrt{2}b$, et $N(z) = z\overline{z} = a^2 - 2b^2$.
On a immédiatement $N(zz') = N(z)N(z')$.
Avec ces notations, on montre que z est un inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(z) = \pm 1$.
En effet, si $zy = 1$ avec $z, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $N(z)N(y) = 1$, donc $N(z) = \pm 1$ car $N(z), N(y) \in \mathbb{Z}$.
Inversement, si $N(z) = \pm 1$, $\pm\overline{z}$ est inverse de z.
Notons donc G le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. C'est lui qu'il faut déterminer.
Notons que $z \in G \iff -z \in G$.
Déterminons $\min(G \cap]1, +\infty[)$. (on verra que c'est un min)
Déjà, l'ensemble est non vide car contient $\theta = 3 + 2\sqrt{2}$.
Si $z = a + b\sqrt{2} \in G$ et $z > 1$: $\overline{z} = \pm 1/z \in]-1, 1[$, $-z < -1$, et $-\overline{z} \in]-1, 1[$.
Ceci permet de voir que $a, b > 0$.
En effet, on ne peut avoir $b = 0$, sinon $a = 1$, et on ne peut avoir $a = 0$.
Si on n'avait pas $a, b > 0$, a et b ne pouvant être tous deux négatifs, il serait de signes opposés strictement, alors $\overline{z}$ ou $-\overline{z}$ serait $> z$ ce qui contredit ce qui précède.
Sachant cela, et avec $\theta \in G$, $\theta > 1$, il suffit d'énumérer quelques valeurs de a pour voir que $\theta = \min(G \cap]1, +\infty[)$.
G contient donc les θ^n, $n \in \mathbb{Z}$, et les $-\theta^n$.
Montrons qu'il n'y a rien d'autre.
Soit $z \in G$. $-z \in G$, donc quitte à multiplier par -1, disons $z > 0$.
Quitte à considérer $1/z$ et à inverser après, disons $z \geq 1$.
Si $z = 1$, rien à faire, donc disons $z > 1$.
donc $z \geq \theta$. Comme $(\theta^n)_{n \geq 1}$ croît strictement vers $+\infty$, on peut se donner $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\theta^n \leq z < \theta^{n+1}$.
Alors $z\theta^{-n} \in [1, \theta[$, donc comme $G \cap [1, \theta[= \{1\}$, $z = \theta^n$.

2.2 Exercice 280

Soit G **un groupe fini de neutre 1. Soit** φ **un automorphisme de** G **sans point fixe c'est-à-dire tel que :** $\forall x \in G, \varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$**. On note** n **l'ordre de** φ **; c'est le plus petit entier** $n \in \mathbb{N}^*$ **tel que** $\varphi^n =$ **id.**
a) Montrer que $\forall x \in G, x\varphi(x)\varphi^2(x)\cdots\varphi^{n-1}(x) = 1$**.**
b) Si $n = 2$**, que peut-on dire du groupe** G **? Donner un exemple.**
c) Si $n = 3$**, montrer que, pour tout** $x \in G, x$ **et** $\varphi(x)$ **commutent.**

1. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1}\varphi(x) \end{array}$.
   Si x et y sont deux éléments de G tels que $f(x) = f(y)$ alors $\varphi(x)\varphi(y)^{-1} = xy^{-1}$ et donc $\varphi(xy^{-1}) = xy^{-1}$. φ étant sans point fixe, on obtient que $xy^{-1} = 1$ d'où $x = y$. Ainsi, f est injective et comme G est fini, f est bijective.
   Soit maintenant $x \in G$. Alors, il existe $y \in G$ tel que $x = y^{-1}\varphi(y)$ et on a
   $$\prod_{k=0}^{n-1} \varphi^k(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \varphi^k(y^{-1}\varphi(y)) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\varphi^k(y)\right)^{-1} \varphi^k(y) = 1 \quad \text{par télescopage.}$$
2. Pour $n = 1$, on obtient immédiatement que $\varphi(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in G$ et comme φ est sans point fixe, $x = x^{-1}$. Ainsi tout élément est d'ordre 2 et le groupe est commutatif (résultat classique). On obtient également que $|G|$ est une puissance de 2. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par exemple.
3. La fonction $h : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1}\varphi(x) \end{array}$ est bijective (preuve analogue à f) et on vérifie alors que, $\varphi(x)x\varphi^2(x) = 1$ pour tout $x \in G$ en écrivant $x = \varphi(y)y^{-1}$. Ainsi, $\varphi^2(x)$ est l'inverse de $x\varphi(x)$ et $\varphi(x)x$ donc $x\varphi(x) = \varphi(x)x$.

2.3 Exercice 303

E **est un espace euclidien,** $u, p \in L(E)$**,** p **est un projecteur, et** $up + pu = u$**.**
Montrer que $tr(u) = 0$**.**

$E = Im(p) \oplus Ker(p)$.
Si $x \in Ker(p)$, on a $p(u(x)) = u(x)$, donc $u(x) \in Im(p) = E_1(p)$.
Si $x \in Im(p)$, $pu(x) + u(x) = u(x)$, ie $p(u(x)) = 0$, et $u(x) \in Ker(p)$.
Si $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont non nuls : donnons nous B_1 base de $Ker(p)$ et B_2 base de $Im(p)$.
$B = (B_1, B_2)$ est une base de E.
Soit f l'ALCA à u. $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, les 0 étant des matrices carrées, donc $tr(u) = 0$.
Si $Ker(p) = \{0\}$, $p = id$, donc $u = 0$ et $tr(u) = 0$.
Si $Im(p) = \{0\}$, $p = 0$, donc $u = 0$ et $tr(u) = 0$.

2.4 Exercice 314

Soient p, q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. **Montrer que pqp est diagonalisable.**
2. **Montrer que $E = Im(p) + Ker(q) + (Im(q) \cap Ker(p))$.**
3. **Montrer que pq est diagonalisable.**
4. **Montrer que $Sp(pq) \subset [0, 1]$.**

1. Un projecteur orthogonal est autoadjoint positif. $(pqp)^* = p^*q^*p^* = pqp$. pqp est autoadjoint donc diagonalisable.
2. $(Im(p) + Ker(q))^\perp = Im(p)^\perp \cap Ker(q)^\perp = Ker(p) \cap Im(q)$.
   On a donc en fait $E = (Im(p) + Ker(q)) \overset{\perp}{\oplus} (Im(q) \cap Ker(p))$.
3. Notons $A = Im(p) + Ker(q)$ et $B = Im(q) \cap Ker(p)$.
   A est stable par pq car $pq(A) \subset Im(p)$.
   B est stable par pq car si $x \in B$, $pq(x) = p(x) = 0$.
   $A \oplus B = E$. Notons f, g les induits par pq sur A et B.
   $g = 0$.
   Il reste à voir que f est diagonalisable (alors en concaténant une base de A diagonalisant f, et une base de B, on aura une base diagonalisant pq).
   Si $Im(p) = \{0\}$, $p = 0$, $pq = 0$, rien à faire.
   Sinon : On se donne une base B de $Im(p)$. Comme $A = Im(p) + Ker(q)$, on peut la compléter en (B, B') base de A, les éléments de B' étant dans $Ker(q)$.
   $A = Im(p) \oplus vect(B')$.
   f est nulle sur $vect(B')$ et $Im(p)$ est stable par f.
   Il faut donc voir que l'induit par f (ie de pq) sur $Im(p)$ (notons le h) est diagonalisable.
   $Im(p)$ est stable par pqp, et h est aussi l'induit sur $Im(p)$ de pqp car $p_{|Im(p)} = id_{Im(p)}$.
   Donc, en tant qu'induit sur un sev stable d'un endomorphisme diagonalisable, h est diagonalisable.
4. Une projection orthogonale diminue la norme.
   Soit λ valeur propre de pq, et x un vecteur propre associé.
   $|\lambda|\ ||x|| = ||pq(x)|| \leq ||q(x)|| \leq ||x||$, donc $|\lambda| \leq 1$.
   Il reste à voir que $\lambda \geq 0$.
   Prenons $\lambda \neq 0$.
   $pq(x) = \lambda x$, donc $x = \dfrac{1}{\lambda} pq(x) \in Im(p)$.
   On a donc aussi $pqp(x) = pq(x) = \lambda x$.
   Donc $\lambda ||x||^2 =< pqp(x), x >=< qp(x), p(x) >$ car $p^* = p$.
   Mais $q \in S^+(E)$, donc $< qp(x), p(x) > \geq 0$, ce qui donne $\lambda \geq 0$.

2.5 Exercice 316

$\mathbb{R}^3$ est canoniquement euclidien, et S est sa sphère unité. $\alpha > 0$.
Montrer que sont équivalents :
(i) $\alpha = 2$
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_n \in S$, **il existe** $p \in S$ **tel que**

$$\sum_{i=1}^{n} ||p - a_i||^\alpha = \sum_{i=1}^{n} ||p - b_i||^\alpha = \sum_{i=1}^{n} ||p - c_i||^\alpha$$

$(i) \implies (ii)$: on suppose $\alpha = 2$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_n \in S$.
Notons $f : p \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sum_{i=1}^{n} ||p - a_i||^2 - \sum_{i=1}^{n} ||p - b_i||^2$ et $g : p \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sum_{i=1}^{n} ||p - a_i||^2 - \sum_{i=1}^{n} ||p - c_i||^2$.
$\nabla f(p) = 2\sum_{i=1}^{n}(p - a_i - (p - b_i)) = 2\sum_{i=1}^{n}(-a_i + b_i) = v$ constant.
De même $\nabla g(p) = 2\sum_{i=1}^{n}(-a_i + c_i) = w$.
Si $v \neq 0$, f est donc constante sur les hyperplans affines de vecteur normal v, qui sont en fait les surfaces de niveau de f, et $t \mapsto f(tv)$, de dévirée $||v||^2$ est strictement croissante affine, et en fait linéaire car $f(0) = 0$, car $||a_i|| = ||b_i|| = 0$.
Idem pour g avec w, si $w \neq 0$.
Cas 1 : $v \neq 0$ et $w \neq 0$.
On a donc $f^{-1}(\{0\}) = v^{\perp}$.
De même pour g.
$f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\})$ est donc un hyperplan, si v et w sont colinéaires, ou une droite vectorielle (intersection de deux hyperplans), et dans tous les cas rencontre S, d'où l'existence de $p \in S$ tel que $f(p) = g(p) = 0$, ce qu'on voulait.
autres cas : encore plus simples. Par exemple, si $v = 0$, f est constante égale à $f(0) = 0$.

$(ii) \implies (i)$: Par contraposée. Supposons $\alpha \neq 2$. Notons $\beta = \alpha/2$.
Montrons que p ne peut exister avec certains points.
Des dessins sont recommandés.
Prenons $n = 4$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = (0, 0, 1)$ et $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = (0, 0, -1)$.
$\sum_{i=1}^{n} ||p - a_i||^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} ||p - b_i||^{\alpha}$ se résume à $||p - a_1|| = ||p - b_1||$, donc p est dans l'intersection de l'hyperplan médiateur de a_1 et b_1, à savoir $H = vect((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, et de S, ie le cercle de rayon 1 et de centre 0 dans H.
On a alors (Pythagore) $||p - a_i||^2 = ||p - b_i||^2 = 2$. Prenons c_1,...,c_4 uniformément répartis sur ce cercle, par exemple $c_1 = (1, 0, 0), c_2 = (0, 1, 0), c_3 = (-1, 0, 0), c_4 = (0, -1, 0)$.
p étant dans ce cercle, c_1pc_3 et c_2pc_4 sont des triangles rectangles en p, et (Pythagore) $||p - c_1||^2 + ||p - c_3||^2 = 4$, $||p - c_2||^2 + ||p - c_4||^2 = 4$.
On a donc $4 \times 2^{\beta} = \sum_{i=1}^{4}(||p - c_i||^2)^{\beta}$ soit $2^{\beta} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(||p - c_i||^2)^{\beta}$.
Les $||p - c_i||^2$ ne peuvent être tous égaux (sinon $p = 0$, penser aux droites médiatrices).
Si $\alpha > 2$ ie $\beta > 1$: $t \geq 0 \mapsto t^{\beta}$ est strictement convexe, donc il en résulte $2^{\beta} > \left(\frac{\sum_{i=1}^{4} ||p - c_i||^2}{4}\right)^{\beta} = 2^{\beta}$.
Ainsi p ne peut exister.
Si $\alpha < 2$ ie $\beta < 1$, on a l'inégalité stricte inverse par stricte concavité de $t \mapsto t^{\beta}$, et la conclusion est la même.

2.6 Exercice 322

Soit $t_1, \ldots, t_n$ des réels.
a) Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
b) On suppose $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
c) On suppose $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On propose deux solutions.

1. A est bien symétrique. On prend $X = (x_1 \cdots x_n)^{\top}$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Alors, $X^{\top} A X = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)^2 \geqslant 0$ donc A est positive.
2. B est bien symétrique. On utilisera la notation $\inf(i, j) = i \wedge j$. On définit également les réels positifs $s_1, \ldots, s_{\ell}$ par $s_1 = t_1$ et pour tout $\ell \geqslant 2$, $s_{\ell} = t_{\ell} - t_{\ell-1}$. Ainsi, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $t_k = \sum_{\ell=1}^{k} s_{\ell}$. On a alors,

$$X^{\top} B X = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i t_{i \wedge j} x_j = \sum_{k=1}^{n} t_k \sum_{i \wedge j = k} x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} s_{\ell} \sum_{i \wedge j = k} x_i x_j = \sum_{\ell=1}^{n} s_{\ell} \sum_{i \wedge j \geqslant \ell} x_i x_j = \sum_{\ell=1}^{n} s_{\ell} \left(\sum_{i=\ell}^{n} x_i\right)^2$$

donc on a bien $X^\top BX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

3. On conserve les notations des questions précédentes et on vérifie que $B-A$ est positive (le caractère symétrique est immédiat).
$$X^\top(B-A)X = X^\top BX - X^\top AX = \sum_{\ell=1}^n s_\ell \left(\sum_{i=\ell}^n x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)^2$$
On note alors X_ℓ la somme $\displaystyle\sum_{i=\ell}^n x_i$. L'égalité précédent se réécrit :
$$X^\top(B-A)X = X^\top BX - X^\top AX = \sum_{\ell=1}^n s_\ell X_\ell^2 - \left(\sum_{\ell=1}^n s_\ell X_\ell\right)^2.$$
On obtient alors la positivité avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, comme $t_n \leqslant 1$,
$$\left(\sum_{\ell=1}^n s_\ell X_\ell\right)^2 = \left(\sum_{\ell=1}^n \sqrt{s_\ell}(\sqrt{s_\ell}X_\ell)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{\ell=1}^n s_\ell\right)\left(\sum_{\ell=1}^n s_\ell X_\ell^2\right) = t_n \sum_{\ell=1}^n s_\ell X_\ell^2 \leqslant \sum_{\ell=1}^n s_\ell X_\ell^2$$

Solution 2 :

1. A est bien symétrique. On prend $X = (x_1 \cdots x_n)^\top$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Alors, $X^\top AX = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)^2 \geqslant 0$ donc A est positive.
2. On pose, pour tout $i \in [\![1,]\!]$, $f_i = \mathbb{1}_{[0,t_i]}$. Alors, $\forall i, j$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i f_j = \min(t_i, t_j)$ donc
$$X^\top BX = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} f_i(t)f_j(t)x_ix_j}_{\geqslant 0 \text{ d'après a)}} dt \geqslant 0$$
par positivité de l'intégrale.
3. On pose, pour tout $i \in [\![1,]\!]$, $g_i = f_i - t_i$. Alors, pour tout couple (i,j) on a
$$\int_0^1 g_i g_j = \int_0^1 f_i f_j - t_i \underbrace{\int_0^1 f_j}_{=t_j} - t_j \underbrace{\int_0^1 f_i}_{=t_i} + t_i t_j = \min(t_i, t_j) - t_i t_j.$$
On en déduit que $X^\top(B-A)X = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} g_i(t)g_j(t)x_ix_j}_{\geqslant 0 \text{ d'après a)}} dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

2.7 Exercice 330

On dit qu'une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$, canoniquement euclidien, vérifie (P) ssi
i) pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts.
ii) pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t$, $D_s \subset D_t$.

1. **Existe-t-il une telle famille ?**
2. **Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ vérifiant (P) telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ soit le centre de D_t ?**
3. **Le résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée continue ?**

1. Prenons D_t de centre $(t, 0)$ et de rayon $f(t)$.
(i) est vérifiée et (ii) revient à $s < t \Longrightarrow f(t) \geq t - s + f(s)$ (faire un dessin). $f = id$ convient.
2. Notons $f(t)$ le rayon du potentiel disque de centre $A(t)$.
Un dessin montre immédiatement que (ii) revient à $s < t \Longrightarrow, f(t) \geq ||A(t) - A(s)|| + f(s)$, soit $f(t) - f(s) \geq ||A(t) - A(s)||$.
Prenons $f(t) = \displaystyle\int_0^t ||A'(u)||du$. Si $0 \leq s < t$, $||A(t) - A(s)|| = ||\displaystyle\int_s^t A'|| \leq \int_s^t ||A'|| = f(t) - f(s)$.

3. La réponse est non.

   Posons $a_0 = 0$, et si $k \geq 1$, $a_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}$ de sorte que $a_k - a_{k-1} = \frac{1}{k^2}$.

   (a_k) converge vers $b = \pi^2/6$.
   On définit w de la sorte :
   Pour tout k, $w(a_k) = (-1)^k \frac{1}{k+1}$.
   Pour tout k, w est affine sur $[a_k, a_{k+1}]$.
   w est nulle sur $[a, +\infty[$.

   Faire un dessin. w est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   On a $|w(a_{k+1}) - w(a_k)| \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{2}{k}$.
   On pose $A(t) = (t, w(t))$. A est continue injective.
   La fonction f (rayon), strictement croissante, doit vérifier pour tout k : $f(a_{k+1}) - f(a_k) \geq ||A(a_{k+1}) - A(a_k)|| \geq |w(a_{k+1}) - w(a_k)| \sim \frac{2}{k}$, donc la série à termes positifs $\sum_k (f(a_{k+1}) - f(a_k))$ diverge.

   Or pour tout n, $\sum_{k=1}^{n} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) = f(a_{n+1}) - f(0) \leq f(b) - f(0)$.
   Contradiction.

2.8 Exercice 334

Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$.

b) Montrer que (u_n) est bornée.
c) Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0 .

1. On a que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ et au plus l'un des a_n peut valoir 1. Si c'est le cas, tous les autres termes de la suite sont nuls, ce qui contredit l'hypothèse de divergence de la série de terme général $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0, 1[$. En particulier, $1 - a_0 \neq 0$ et donc, par récurrence la suite u est bien définie. On peut écrire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{b_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k a_{n-1}}{1 - a_0}.$$

2. Tout d'abord, on remarque que la suite u est à termes positifs. Il suffit donc de montrer qu'elle est majorée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n := \max(u_0, \ldots, u_n)$. On a alors
$$(1 - a_0) u_n \leqslant b_n + M_{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = b_n + M_{n-1}(1 - a_0)$$
   Ainsi $M_n \leq \frac{b_n}{1 - a_0} + M_{n-1}$, et donc $0 \leq M_n - M_{n-1} \leqslant \frac{b_n}{1 - a_0}$. Donc la série $\sum_{n \geqslant 1} (M_n - M_{n-1})$ converge. Il en est donc de même pour la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En particulier elle est bornée et donc u est bornée.

3. On note respectivement f, g et h les sommes des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} u_n x_n$, $\sum_{n \geqslant 0} b_n x_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} a_n x_n$. Les suites a, b et u sont bornées donc les rayons de convergences de ces séries entières valent au moins 1.
   De plus, par produit de Cauchy, la relation définissant la suite u donne
$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = g(x) + f(x)h(x) \quad \text{et donc} \quad g(x) = (1 - x)f(x) \times \frac{1 - h(x)}{1 - x}.$$
   On va montrer que g est continue en 1 et que $x \mapsto (1 - x)f(x)$ tend vers ℓ en 1 si u tend vers ℓ. La divergence de la série à termes positifs $\sum_{n \geqslant 0} na_n$ impliquant que h' tend vers $+\infty$ en 1, on peut alors conclure que $\ell = 0$.

— La convergence de série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ donne la continuité de g en 1 (Abel radial, ou CVN sur $[-1,1]$).

— Soit $\varepsilon > 0$. En notant ℓ la limite de la suite u et en fixant $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, on a pour tout $x \in [0,1[$, $1-x \leqslant 1$ donc

$$|(1-x)f(x) - \ell| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} |u_n - \ell| x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n - \ell| x^n \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} |u_n - \ell| x^n + \varepsilon \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

$x^{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc quitte à prendre N plus grand, on peut supposer que $\frac{x^{N+1}}{1-x} \leqslant 1$. On a donc

$$|(1-x)f(x) - \ell| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} |u_n - \ell| x^n + \varepsilon$$

et donc pour x proche de 1, on a $|(1-x)f(x) - \ell| \leqslant 2\varepsilon$ donc $(1-x)f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ell$.

— Pour $x \in [0,1[$ on a, en utilisant que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$,

$$\phi(x) := \frac{1-h(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$$

L'interversion de sommes est licite car on ne manipule que des séries à termes positifs. On en déduit que ϕ est croissante sur $[0,1[$ par somme de fonctions croissante et donc admet une limite en 1 que l'on note α. Intuitivement, la divergence de la série de terme général na_n traduit la non dérivabilité de h en 1 donc que α ne peut pas être réel. Si c'est la cas, on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leqslant \phi(x)$. On fait tendre x vers 1 et on obtient que $\sum_{n=0}^{N} na_n \leqslant \alpha$ et on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$ que $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n \leqslant \alpha$ ce qui est absurde car la somme de gauche vaut $+\infty$ (série divergente à terme positifs). On a donc que ϕ tend vers $+\infty$ en 1.

2.9 Exercice 337

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = \pi/2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Nature de la série de terme général a_n^2 ?

1. On a, par étude de fonction :

x	0	$\pi/2$
$\sin$	$0 \nearrow$	1
$\sin x - x$	$0 \quad -$	

— Comme $[0,\pi/2]$ est stable par sin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0,\pi/2]$.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \sin a_n - a_n \leq 0$, donc (a_n) est décroissante.

— (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \in [0,\pi/2]$, et sin étant continue, ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$ c'est-à-dire $\sin \ell - \ell = 0$ et, avec le tableau de signe : $\ell = 0$.

2. On a donc :

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) = \ln\left(\frac{a_n - \frac{a_n^3}{6} + o\left(a_n^3\right)}{a_n}\right)$$

$$= \ln\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + o\left(a_n^2\right)\right) = -\frac{a_n^2}{6} + o\left(a_n^2\right) \sim -\frac{a_n^2}{6}$$

Par comparaison des séries à termes négatifs, $\sum a_n^2$ et $\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ ont la même nature.

3. On a :
$$\sum_{n=0}^{N}\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\sum_{n=0}^{N}\left(\ln\left(a_{n+1}\right)-\ln\left(a_n\right)\right)=\sum_{n=0}^{N}\ln\left(a_{n+1}\right)-\sum_{n=0}^{N}\ln\left(a_n\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{N+1}\ln\left(a_n\right)-\sum_{n=0}^{N}\ln\left(a_n\right)=\ln(a_{N+1})-\ln(a_0)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$$
car (a_n) tend vers 0.

Ainsi $\sum\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ diverge.

4. Ainsi $\sum a_n^2$ diverge.

2.10 Exercice 340

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

— Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)$ et $T_0=0$. Alors :
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma(n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\left(T_n-T_{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{T_n}{n^2}-\sum_{n=1}^{N}\frac{T_{n-1}}{n^2}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{T_n}{n^2}-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{T_n}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{N-1}T_n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+\frac{T_N}{N^2}$$
(on a effectué ce qu'on appelle une transformation d'Abel)
$$\geq\sum_{n=1}^{N-1}T_n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}T_n\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

— Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors
$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\sum_{a\in A_n}a$$
avec :
$$A_n=\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}=\{a_1,\ldots,a_n\}$$
avec $a_1<a_2<\cdots<a_n$, en ordonnant les n éléments de A_n (car σ est injective).

Mais alors $1\leq a_1$, et $1\leq a_1<a_2$ donc, comme a_2 est un entier, $a_2\geq 2$, et ainsi de suite... Ce que l'on va montrer facilement par récurrence : pour $i\in[\![1,n]\!]$, $a_i\geq i$.
— On a $a_1\in\mathbb{N}^*$ donc $a_1\geq 1$.
— Si pour un i, $a_i\geq i$ alors, par injectivité de σ, $a_{i+1}>a_i\geq i$, et comme a_{i+1} est un entier, $a_{i+1}\geq i+1$.
— Ainsi on a le résultat.
Ainsi :
$$T_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

— Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma(n)}{n^2}\geq\sum_{n=1}^{N-1}T_n\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$
$$\geq\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{2n+1}{2n(n+1)}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$
car $\frac{2n+1}{2n(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, qui est le terme général positif d'une série de Riemann divergente.

— Ainsi $\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma(n)}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et la série $\sum\frac{\sigma(n)}{n^2}$ est donc divergente.

2.11 Exercice 343

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ strictement croissante et bijective.

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ ont même nature.

Cet exercice a déjà été corrigé dans un numéro de la RMS 2013, sans recours à des intégrales. Il est à rapprocher de l'exercice 414 (X-PSI), avec l'hypothèse $\mathcal{C}^1$.
On préfère ici passer par des intégrales, ce qui est plus agréable.
Commençons avec des hypothèses plus fortes : supposons f $\mathcal{C}^1$.
Usuellement, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f}$ ont même nature.
En écrivant $\displaystyle\frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt \leq \frac{f^{-1}(n+1)}{n^2}$, et avec $\displaystyle\frac{f^{-1}(n)}{(n\pm 1)^2} \sim \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$, on montre que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt$ ont même nature.
Dans la suite, $y = f^{-1}(x)$, et on omet des bornes fixes sans importance.
$\displaystyle\int_1^x \frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt \underset{t=f(u)}{=} \int^y \frac{uf'(u)}{f(u)^2}du \underset{IPP}{=} cste - \frac{y}{f(y)} + \int^y \frac{1}{f}.$
Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f} < \infty$:
$\displaystyle\int^y \frac{1}{f}$ converge quand $y \to +\infty$.
De plus, $\displaystyle 0 \leq \frac{y}{f(y)} \leq 2\int_{y/2}^y \frac{1}{f} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_1^x \frac{f^{-1}(t)}{t^2}$ converge quand $x \to +\infty$.
Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt < \infty$:
$\displaystyle\int_1^x \frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt$ converge quand $x \to +\infty$.
De plus, $\displaystyle 0 \leq \frac{y}{4f(y)} = x\frac{f^{-1}(x)}{4x^2} \leq \int_x^{2x} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int^y \frac{1}{f}$ converge quand $y \to +\infty$.
Ainsi on a le résultat voulu.

En reprenant les hypothèses initiales sur f : On peut voir que l'égalité $\displaystyle\int_1^x \frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt = f^{-1}(1) - \frac{f^{-1}(x)}{x} + \int_{f^{-1}(1)}^{f^{-1}(x)} \frac{1}{f}$ est vraie sans supposer f $\mathcal{C}^1$, ce qui peut se faire en approchant uniformément f sur $[1, x]$ par des interpolations affines par morceaux (alors, les réciproques approcheront uniformément f^{-1} sur $[f^{-1}(1), f^{-1}(x)]$), et vérifier la formule pour de telles fonctions.

Une autre possibilité pour se ramener au cas $\mathcal{C}^1$: considérons la suite (x_n) strictement croissante et divergeant vers $+\infty$ formée de $\mathbb{N}^*$ et des $f^{-1}(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
A titre d'exercice pas compliqué, mais pas inintéressant, le lecteur pourra montrer l'existence de $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ strictement croissante telle que $\forall n$, $g(x_n) = f(x_n)$. Il suffit ensuite de remplacer f par g dans l'énoncé.

2.12 Exercice 357

$u, v \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{|u|, |v|\}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})}$.

Il suffit de décomposer en éléments simples et de calculer des intégrales "usuelles" (indices) par DSE. Pour le cas $u = v$, on utilisera le cas $u \neq v$ et on fera tendre v vers u.
Calculons d'abord $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{u - re^{i\theta}}$.
Si $r < |u|$:
On écrit $\displaystyle\frac{1}{u - re^{i\theta}} = \frac{1}{u}\frac{1}{1 - re^{i\theta}/u} = \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty}(r/u)^n e^{in\theta}$.
$\displaystyle\int_0^{2\pi} |(r/u)^n e^{in\theta}|d\theta = 2\pi(r/|u|)^n$ sommable, donc on peut intégrer terme à terme, et on obtient $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{u - re^{i\theta}} = \frac{2\pi}{u}$ car

$\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{in\theta}d\theta = 2\pi\delta_{n,0}$.
Si $r > |u|$:
On écrit $\dfrac{1}{u - re^{i\theta}} = \dfrac{e^{-i\theta}}{r}\dfrac{1}{(u/r)e^{-i\theta} - 1} = \dfrac{-1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u/r)^n e^{-i(n+1)\theta}$, et l'intégration terme à terme donne $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{u - re^{i\theta}} = 0$.

Ensuite, si $u \neq v$, on écrit $\dfrac{1}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})} = \dfrac{1}{v - u}\left(\dfrac{1}{u - re^{i\theta}} - \dfrac{1}{v - re^{i\theta}}\right)$.
Notre intégrale vaut donc :
0 si ($r > |u|$ et $r > |v|$).
$\dfrac{2\pi}{uv}$ si ($r < |u|$ et $r < |v|$).
$\dfrac{2\pi}{v(u - v)}$ si $|u| < r < |v|$.
$\dfrac{2\pi}{u(v - u)}$ si $|v| < r < |u|$.
Cas $u = v$:
Si $r > |u|$: Soit $\alpha = (r + |u|)/2$. Considérons $f : w \in D(0, \alpha) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(u - re^{i\theta})(w - re^{i\theta})}$.
f est continue avec la domination constante donc intégrable sur $[0, 2\pi]$:
$\dfrac{1}{|(u - re^{i\theta})(w - re^{i\theta})|} \leq \dfrac{1}{(r - \alpha)^2}$.
Ainsi en faisant tendre $w \in D(0, \alpha)\backslash\{v\}$ vers v, on obtient $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})} = 0$.
Similairement, si $r < |u|$, on obtient $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(u - re^{i\theta})^2} = \frac{2\pi}{u^2}$.

2.13 Exercice 366

Soit $P = a_1X + ... + a_dX^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

1. **Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(P(x)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_kX^k$.**

2. **Montrer que les b_k sont tous non nuls.**

1. $\exp(P(x)) = \displaystyle\prod_{k=1}^{d} e^{a_kx^k}$ est DSE sur $\mathbb{R}$ par DSE de l'exponentielle, et produits de Cauchy.

2. Notons $g(x) = \exp(P(x))$. $b_k = \dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}$.
   Par récurrence immédiate, $g^{(n)}(x) = Q_n(x)\exp(P(x))$ avec $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$.
   On montre par récurrence que Q_n est du type $\alpha_n + \beta_nX + ...$ avec α_n impair et β_n pair, ce qui garantit $Q_n(0) = \alpha_n \neq 0$.
   Pour $n = 0$, $Q_0 = 1$ et c'est vrai.
   Si la propriété est vraie au rang n : $Q_{n+1} = Q_n' + Q_nP'$.
   Notons $Q_n = \alpha_n + \beta_nX + \gamma_nX^2 + ...$
   $\alpha_{n+1} = \underbrace{\beta_n}_{pair} + \underbrace{a_1\alpha_n}_{impair}$ est bien impair.
   $\beta_{n+1} = 2\gamma_n + \underbrace{\beta_n}_{pair} a_1 + 2\alpha_na_2$ est pair.

2.14 Exercice 390

Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. telle que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = p$ et $P(X_n = 0) = 1 - 2p$.

On cherche p tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{Z}$, $P(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_iX_i = 0) \geq P(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i = b)$.

1. **Montrer que $p \leq 1/3$, puis $p < 1/3$, puis $p \leq 1/4$.**

2. Si X est à valeur dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X(\theta) = E(e^{i\theta X})$. Exprimer $P(X = k)$ avec Φ_X.

3. Montrer que $p \leq 1/4$ est une condition suffisante.

1. $P(X_1 = 0) \geq P(X_1 = 1)$ donne $p \leq 1/3$, puis $P(X_1 + 2X_2 = 0) \geq P(X_1 + 2X_2 = 1)$ donne $p < 1/3$.
   Considérons les évènements $W = (\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} X_k = 0)$ et $T = (\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} X_k = 1)$.
   $W = (X_1 = 0, ..., X_n = 0)$ car pour des raisons de parité, $X_1 = 0$, puis on simplifie, etc... $P(W) = (1 - 2p)^n$.
   $1 + 2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$, donc T contient
   $(X_1, ..., X_n) \in \{(1, 0, ..., 0), (-1, 1, 0, ..., 0), (-1, -1, 1, 0, ..., 0), ..., (-1, ..., -1, 1)\}$.
   Ainsi $P(T) \geq \sum_{k=1}^{n} p^k (1 - 2p)^{n-k}$.
   Donc $\sum_{k=1}^{n} p^k (1 - 2p)^{n-k} \leq (1 - 2p)^n$, soit $\sum_{k=1}^{n} (p/(1 - 2p))^k \leq 1$.
   On passe à la limite quand $n \to +\infty$, ce qui donne $p/(1 - 2p) \leq 1/2$, soit $p \leq 1/4$.
2. $\Phi_X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(X = k) e^{ik\theta}$.
   On a, si $b \in \mathbb{Z}$, en justifiant une intégration terme à terme (en écrivant deux sommes sur $\mathbb{N}$ pour être dans le cadre du programme), $P(X = b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_X(t) e^{-ibt} dt$.
   La justification de l'intégration terme à terme vient de $\int_0^{2\pi} |P(X = k) e^{i(k-b)t}| dt = 2\pi P(X = k)$ sommable.
3. On suppose $p \leq 1/4$.
   Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{Z}$. Soit $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.
   Par lemme des coalitions et indépendance,
   $\Phi_X(t) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{ita_k X_k}) = \prod_{k=1}^{n} (2p \cos(a_k t) + (1 - 2p)) \in \mathbb{R}$.
   $2p \cos(a_k t) + (1 - 2p) \geq 1 - 4p \geq 0$, donc $\Phi_X \geq 0$.
   Soit $b \in \mathbb{Z}$.
   $P(X = 0) - P(X = b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_X(t)(1 - e^{-ibt}) dt$
   $\underset{\text{c'est reel}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\Phi_X(t)(1 - \cos(bt))}_{\geq 0} dt \geq 0$

3 X-ESPCI-PC

3.1 446 - X-ESPCI PC

Déterminer les entiers n tels qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$.
Indication : Commencer par $n \geq 3$.

1. Notons déjà que le polynôme :
   $$P = X^2 - X + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)$$
   est scindé dans $\mathbb{C}$, à racines simples.
2. **Cas $n = 2$.**
   (a) **Recherche au brouillon.**
   Supposons qu'il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_2 = 0$.
   Alors P est annulateur de la matrice A, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, sous forme d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$, qui apparaissent autant de fois l'un que l'autre

(car, pour une matrice à coefficients réels, la multiplicité d'une valeur propre complexe est égale à la multiplicité d'une valeur propre conjuguée).

Ainsi A est semblable dans $\mathbb{C}$ à $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{3}} \end{pmatrix}$, de trace 1 et de déterminant 1.

Comme la trace et le déterminant sont des invariants de similitude :

$$\begin{aligned} a+d &= 1 \\ ad-bc &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, parmi d'autres possibilités, $a=1$, $d=0$, $b=-1$ et $c=1$ semblent convenir.

(b) **Une solution si $n=2$.**

Posons $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Alors $A_2^2 - A_2 + I_2 = 0$ donc, si $n=2$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$.

3. **Cas général.**

(a) **Analyse**

Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$.

Alors P est annulateur de la matrice A, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, sous forme d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$, qui apparaissent autant de fois l'un que l'autre (car, pour une matrice à coefficients réels, la multiplicité d'une valeur propre complexe est égale à la multiplicité d'une valeur propre conjuguée). Ainsi n est nécessairement pair.

(b) **Synthèse**

Si n est pair, posons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, la matrice diagonale par blocs de taille $(2,2)$ où chaque bloc diagonal vaut A_2. Alors, par un calcul par bloc, $A^2 - A + I_n = 0$.

(c) **Conclusion**

Ainsi les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$ sont exactement les entiers pairs (non nuls).

3.2 460 - X-ESPCI PC

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Pour résoudre cet exercice, on va successivement se ramener à des cas plus simples.

1. **On va commencer par se ramener au cas où A est diagonale.**

Par le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ tel que $A = PA_1P^{-1} = PA_1P^T$ ($P^T = P^{-1}$), avec $A_1 = Diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors $AB = PA_1P^TB = PA_1P^TBPP^T = P(A_1P^TBP)P^{-1}$.

Donc AB et A_1P^TBP sont semblables (donc l'une est diagonalisable si et seulement si l'autre l'est).

De plus, $A_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et est diagonale et, en posant $B_1 = P^TBP$, $B_1^T = (P^TBP)^T = P^TB^TP = -P^TBP = -B_1$ donc $B_1 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, on a le même problème qu'initialement mais sans perdre de généralité, on peut supposer de plus que A est diagonale.

2. **On va ensuite se ramener au cas où $A = I_n$.**

Posons $A_2 = Diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$, alors $A_2^2 = A_1$, A_2 est inversible et $A_2^T = A_2$.

Alors $A_1B_1 = A_2^2B_1 = A_2A_2B_1A_2^TA_2^{-1}$.

Donc A_1B_1 et $B_2 = A_2B_1A_2^T$ sont semblables (donc l'une est diagonalisable si et seulement si l'autre l'est).

De plus, $B_2^T = (A_2B_1A_2^T)^T = A_2B_1^TA_2^T = -A_2B_1A_2^T = -B_2$ donc $B_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On est donc ramené au cas où $A = I_n$.

3. **On va ensuite se ramener au cas où B est inversible.**

(a) Montrons que $\ker(B_2) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(B_2) = \mathbb{R}^n$.

Soient $u \in \ker(B_2)$ et $v \in \mathrm{Im}(B_2)$: $B_2a = v$ avec $a \in \mathbb{R}^n$.

$$< v, u >= v^Tu = (B_2a)^Tu = a^TB_2^Tu = -a^TB_2u = 0$$

Ainsi $\ker(B_2) \perp \mathrm{Im}(B_2)$ donc les deux espaces sont orthogonaux donc en somme directe et, avec le théorème du rang, ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ et stables par B_2.

(b) Prenons une BON adaptée à $\ker(B_2) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(B_2) = \mathbb{R}^n$: alors la matrice de passage R est orthogonale et $B_3 = RB_2R^{-1} = RB_2R^T$ avec :

$$B_3 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$$

avec $N_1 = 0$ car il s'agit de l'induit de B_2 à son noyau et N_2 inversible car il s'agit de l'induit de B_2 à son image qui est en somme directe avec son noyau.

De plus, $B_3^T = RB_2^TR^T = -RB_2R^T = -B_3$ donc B_3 est antisymétrique donc N_2 est antisymétrique.

Ainsi, si N_2 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, B_3 le sera et donc B_2 aussi (car elles sont semblables).

4. **Il s'agit maintenant de montrer que N_2 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec N_2 antisymétrique, réelle et inversible.**

N_2^2 est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$: notons les α_i les valeurs propres deux à deux distinctes de N_2^2. Alors $\prod(X-\alpha_i)$ est un polynôme réel, annulateur de N_2^2, scindé à racines simples non nulles (car 0 non valeur propre de N_2^2).

Notons β_i et $-\beta_i$ les deux racines carrées complexes (distinctes) de α_i.

Alors $\prod(X-\beta_i)(X+\beta_i)$ est un polynôme complexe scindé à racines simples, annulateur de N_2 donc N_2 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

3.3 477 - X-ESPCI-PC

Étudier la convergence de la série de terme général $|\sin(2\pi n!e)|^\alpha$ selon les valeurs du réel $\alpha > 0$.

— On a :

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

donc :

$$n!e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+p)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\dots n + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} = a_n + b_n$$

— On a $a_n \in \mathbb{N}$, ainsi :

$$\sin(2\pi n!e) = \sin(2\pi a_n + 2\pi b_n) = \sin(2\pi b_n)$$

— On a :

$$\frac{1}{n+1} \leq b_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)}\right)^p = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}$$

car on a une série géométrique de raison $\dfrac{1}{n+1} \in]-1,1[$ donc convergente.

Ainsi :

$$\frac{n}{n+1} \leq nb_n \leq 1$$

Par le théorème des gendarmes, $nb_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

— Ainsi

$$\sin(2\pi n!e) = \sin(2\pi b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n}$$

et, donc

$$|\sin(2\pi n!e)|^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^\alpha$$

Ainsi, par le critère des séries de Riemann et par comparaison des séries à termes positifs, $\sum |\sin(2\pi n!e)|^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3.4 489 - X-ESPCI-PC

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **avec** $a < b$ **et** $f,\ g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$**.**
On note $m = \inf_{[a,b]} \frac{f}{g}$ **et** $M = \sup_{[a,b]} \frac{f}{g}$**.**
Montrer que :

$$\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq \frac{(M+m)^2}{4mM} \left(\int_a^b fg \right)^2$$

Travaillons avec le produit scalaire intégral sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$.
On a $mg \leq f \leq Mg$ donc :

$$\int_a^b (f-mg)(f-Mg) \leq 0$$

c'est-à-dire

$$0 \geq \int_a^b (f^2 - Mfg - mfg + Mmg^2) = \int_a^b f^2 - (M+m)\int_a^b fg + Mm\int_a^b g^2$$

Ainsi :

$$\int_a^b f^2 + Mm\int_a^b g^2 \leq (M+m)\int_a^b fg$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{Mn}}\int_a^b f^2 + \sqrt{Mm}\int_a^b g^2 \leq \frac{M+m}{\sqrt{Mm}}\int_a^b fg$$

Or, pour $\alpha > 0$, $\alpha p^2 + \frac{1}{\alpha}q^2 \geq 2pq$ car $\left(\sqrt{\alpha}p - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}q\right)^2 \geq 0$.
Ainsi :

$$2\sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2} \leq \frac{1}{\sqrt{Mn}}\int_a^b f^2 + \sqrt{Mm}\int_a^b g^2 \leq \frac{M+m}{\sqrt{Mm}}\int_a^b fg$$

Il ne reste plus qu'à élever au carré.

3.5 511- X-ESPCI-Niveau MPSI

On a un dé équilibré à N faces numérotées de 1 à N. On effectue une suite de lancers indépendants. Le jeu s'arrête lorsque le résultat du $n+1$-ième lancer est strictement inférieur à celui du n-ième.

1. **Déterminer la probabilité π_k que le jeu s'arrête après k lancers (ie qu'il y ait au moins k lancers).**
2. **Montrer que $\pi_k \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.**

1. Il s'agit de dénombrer les suites croissantes de longueur k à valeurs dans $[\![1,N]\!]$. Il y en a $\binom{N+k-1}{k}$.

   En effet, considérons la figure

   $$\bullet\ \bullet\ |\ |\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ |\ |$$

   qui représente la suite $2,2,3,5,5$: il y a deux $\bullet$ avant la première barre, deux $\bullet$ avant la seconde barre, 3 $\bullet$ avant la 3e barre,...

   Toute suite croissante peut se représenter ainsi en une succession de $\bullet$ et de $|$.

   Une telle représentation se fait sur $N+k$ emplacements (il y a k emplacements pour les $|$ et N pour les $\bullet$). Il s'agit de déterminer de combien de façons on peut placer les barres. Il y a k barres à placer parmi $N+k-1$ emplacements (le premier n'est pas possible). Finalement, cela donne bien $\binom{N+k-1}{k}$ suites croissantes de longueur k et à valeurs dans $[\![1,N]\!]$.

   Ainsi, $\pi_k = \frac{\binom{N+k-1}{k}}{N^k}$.

2. On a $\pi_k = \dfrac{(N+k-1)!}{k!(n-1)!N^k}$. A l'aide de Stirling :

$$\pi_k \sim \frac{\sqrt{2\pi(N+k-1)}\left(\frac{N+k-1}{e}\right)^{N+k-1}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k N^k N!}$$

Or, $\dfrac{(N+k-1)^{N+k-1}}{k^k} = \left(1+\dfrac{N-1}{k}\right)^k (N+k-1)^{N-1} \sim e^{N-1}k^{N-1}$.

Finalement,

$$\pi_k \sim \frac{k^N}{kN^k N!}$$

ce qui tend bien vers 0 lorsque $k \to +\infty$.

Remarque : on n'a pas besoin de Stirling puisqu'on a directement $\dfrac{(N+k-1)!}{k!} = (N+k-1)...(k+1)$ qui est un produit de $N-1$ termes (nombre fixe) et qui est donc équivalent à k^{N-1}.

3.6 515 - X-ESPCI-PC

On tire une pièce n fois indépendamment avec probabilité de faire pile $1/n$. Soit p_n la probabilité d'obtenir un nombre impair de fois pile. Étudier le comportement de p_n.

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus au cours des n lancers : $X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/n)$.

Alors, les événements étant deux à deux disjoints :

$$p_n = \mathbf{P}\left(\bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} (X_n = k)\right) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \mathbf{P}(X_n = k)$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = S_{1,n}$$

Posons $S_{2,n} = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$, on a :

$$\begin{cases} S_{2,n} + S_{1,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1 \\ S_{2,n} - S_{1,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(-\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \left(-\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \end{cases}$$

Ainsi :

$$p_n = S_{1,n} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right)$$

Or :

$$n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2$$

donc :

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-2}$$

et donc :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-e^{-2}}{2}$$

4 Mines

4.1 Exercice 519

Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $3^m = 8 + n^2$.

— Si m est pair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$ et alors $3m = 8 + n^2$ donne $(3^k - n)(3^k + n) = 8$. Ainsi, $3^k - n$ et $3^k + n$ sont des entiers naturels et $3^k - n \leqslant 3^k + n$. On a donc deux possibilités car $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4$. Si $3^k - n = 1$ et $3^k + n = 8$ alors $2 \times 3^k = 9$ ce qui est absurde. Ainsi $3^k - n = 2$ et $3^k + n = 4$ d'où $k = 1$ et $n = 1$. Ainsi, $(m, n) = (2, 1)$.

— Si m est impair. Alors n est impair et $3^m \equiv 3[4]$ donc $n^2 \equiv 3[4]$ ce qui est impossible (on a toujours $n^2 \equiv 1[4]$ si n est impair. Ainsi, si m est impair il n'y a pas de solution.

Réciproquement, $3^2 = 8 + 1^2$ donc il y a une unique solution qui est le couple $(2, 1)$.

4.2 Exercice 522 (Niveau MPSI)

1. **Soit $n > 6$ un entier. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{N}\backslash\{0, 1\})^2$ tel que $a + b = n$ et $a \wedge b = 1$.**
2. **Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $p_1 \cdots p_k \geqslant p_{k+1} + p_{k+2}$. Ind. Utiliser la première question avec $n = p_1 \cdots p_k$.**

1. Supposons avoir trouvé p un nombre premier de $[\![2, n-2]\!]$ premier avec n. Alors on pose $a = p$ et

   $b = n - p$. On a $a \geq 2$ et $b \geq 2$. Ils sont bien premiers entre eux car le seul diviseur autre que 1 de a est p et comme il ne divise pas n, il ne divise pas b. Ainsi, $a \wedge b = 1$.

   Reste à justifier l'existence de p. Si un tel p n'existait pas : notons $p_1 < p_2 < ... < p_k$ les nombres premiers de $[\![2, n-2]\!]$. Notons aussi p_{k+1} le plus petit nombre premier $> p_k$. On aurait donc $p_1...p_k|n$ et $p_{k+1} \geq n - 1$. Or, $n-1$ n'est divisible par aucun p_1,...,p_k donc nécessairement par p_{k+1}. Ainsi, $n = p_{k+1} + 1$: il est donc pair. C'est absurde !
2. Il existe $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $p_1...p_k = n$. Soit q un diviseur premier de a. Comme $a \wedge b = 1$, q n'est pas un diviseur de $p_1...p_k$, on a donc $p \geq p_{k+1}$. De même, soit q un diviseur premier de b, on a $q \geq p_{k+1}$. Comme $a \wedge b = 1$, on a $q \neq p$ donc $p + q \geq p_{k+1} + p_{k+2}$ et ainsi, $a + b \geq p_{k+1} + p_{k+2}$.

4.3 526-MinesPonts-MP

1. **Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que H est cyclique d'ordre divisant n. Soit d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.**
2. **On note φ l'indicatrice d'Euler. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Montrer l'égalité $n = \displaystyle\sum_{d \in \mathcal{D}(n)} \varphi(d)$.**
3. **Montrer que si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.**

1. Soit a un générateur de G.
   - Soit H un sous-groupe de G. Notons $K = \{\ell \in \mathbb{Z}, a^\ell \in H\}$. K est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ car :
     - $e_G \in H$ donc $0 \in K$ et $K \neq \emptyset$.
     - Soit $(k, \ell) \in K^2$. On a $a^k \in H$, $a^\ell \in H$ donc $a^k a^{-\ell} \in H$ et finalement, $k - \ell \in K$

     Ainsi, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $K = d\mathbb{Z}$. On a donc $H = \{a^{dp}, p \in \mathbb{Z}\}$. H est cyclique et engendré par a^d.
   - Existence d'un sous-groupe d'ordre d : notons $d' \in \mathbb{N}$ tel que $dd' = n$. Posons $H =< \{a^{d'}\} >$. $a^{d'}$ est d'ordre d car si $m \in \mathbb{Z}$, on a $(a^{d'})^m = e_G$ ssi $n|md'$ ssi $d|m$. Ainsi, H est un sous-groupe de G d'ordre d.

- Unicité d'un sous-groupe d'ordre d : soit H un sous-groupe d'ordre d. Soit $h \in H$:il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $h = a^k$. Or, $h^d = e_G$ (selon le théorème de LAGRANGE), donc $a^{kd} = e_G$ puis $n|kd$ et enfin, $d'|k$ et finalement, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $h = a^{d'\ell}$. Ainsi,
$$H \subset < \{a^{d'}\} >$$
et par égalité des cardinaux
$$H = < \{a^{d'}\} >$$
Pour la question 2, on note G_d l'unique sous-groupe de G d'ordre d.

2. On note $H_d = \{g \in G, o(g) = d\}$. On a, selon le théorème de LAGRANGE,
$$G = \bigsqcup_{d \in D_n} H_d$$
et ainsi, en passant aux cardinaux,
$$n = \sum_{d \in D_n} |H_d|$$
Or, H_d est l'ensemble des générateurs de G_d :
si α est un générateur de G_d, alors α est d'ordre d. Réciproquement, si $\alpha \in H_d$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = a^k$. Comme $\alpha^d = 1$, on a $a^{kd} = 1$ donc $n|kd$ donc $d'|k$ et finalement, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = a^{d'\ell}$. Ainsi, $\alpha \in G_d$ et comme son ordre est d, c'est un générateur de G_d.
Ainsi, $|H_d| = \varphi(d)$ d'où le résultat.
3. Cours

4.4 528-MinesPonts-MP

Soit p un nombre premier impair.

1. **Dénombrer les carrés de $\mathbb{F}_p$.**
2. **Montrer que -1 est un carré de $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.**

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p & \to & \mathbb{F}_p \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Il s'agit donc de dénombrer l'image de f. Pour cela, on s'intéresse au nombre d'antécédents de $a \in f(\mathbb{F}_p)$. Soit $x \in \mathbb{F}_p$ tel que $x^2 = a$. Soit $y \in \mathbb{F}_p$. On a :
$$\begin{array}{rcl} x^2 = y^2 & \Leftrightarrow & x^2 - y^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (x-y)(x+y) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x - y = 0 \text{ ou } x + y = 0 \\ & \Leftrightarrow & y = x \text{ ou } y = -x \end{array}$$
Si $x \neq 0$, alors $-x \neq x$ et a a alors deux antécédents par f.
Si $a = 0$. Alors a a un unique antécédent.
Finalement, le nombre de carrés est $1 + \dfrac{p-1}{2}$.
2. - Supposons que $p \equiv 1[4]$. Nous allons nous intéresser à la classe de $(p-1)!$ dans $\mathbb{F}_p$.
D'une part, en regroupant x et $p - x$, on obtient $(p-1)! = [1.(p-1)].[2(p-2)]...[(\frac{p-1}{2})(\frac{p+1}{2})]$. Or, $\overline{x(p-x)} = -\overline{x}$ donc $\overline{(p-1)!} = \underbrace{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}_{1} \underbrace{\overline{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}^2}_{A}$ ie
$$\overline{(p-1)!} \equiv A^2$$
D'autre part, en regroupant chaque terme avec son inverse. Notons qu'on a $\overline{x} = \dfrac{\overline{1}}{x}$ ssi $\overline{x}^2 = \overline{1}$ ssi $\overline{x} = \overline{1}$ ou $\overline{x} = \overline{-1}$.
Donc,
$$\overline{(p-1)!} = \overline{1}.\overline{(-1)} = \overline{-1}$$
Finalement,
$$A^2 = \overline{-1}$$

- Supposons que -1 soit un carré de $\mathbb{F}_p$. Il existe donc $a \in \mathbb{F}_p$ tel que $a^2 = -1$. Or, $\mathbb{F}_p^*$ est un groupe pour $\times$ de cardinal $p-1$. On a donc, d'après le théorème de Lagrange, $a^{p-1} = 1$. Or, comme $p-1$ est pair, $a^{p-1} = \left(a^2\right)^{(p-1)/2}$. Ainsi, $(-1)^{(p-1)/2} = 1$ donc $\dfrac{p-1}{2}$ est pair c'est-à-dire qu'on a $p \equiv 1 \mod 4$.

4.5 531-MinesPonts-MP

Soit A un anneau commutatif. I est un idéal de A, on note $R(I) = \{x \in A; \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

1. **Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I.**
2. **Soient I et J deux idéaux de A. Montrer :**
   $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J); \quad R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.
3. **Pour cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la décomposition primaire ne comporte aucun facteur premier d'exposant au moins égal à 2.**

1. - $A \supset R(I) \supset I$
   - Soit $(x, y) \in R(I)^2$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$ et il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y^m \in I$. Alors, d'après la formule du binôme, on a $(x+y)^{n+m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}$. Or, si $k \in [\![n, n+m]\!]$, on a $x^k y^{n+m-k} = \underbrace{x^{n-k} y^{n+m-k}}_{\in A} \underbrace{x^n}_{\in I} \in I$ donc $\dbinom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \in I$. Et de même, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x^k y^{n+m-k} = x^k y^{n-k} y^m \in I$ et $\dbinom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \in I$. Finalement, $(x+y)^{n+m} \in I$ et donc $x + y \in R(I)$.
   - Soit $x \in R(I)$ et $a \in A$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$. On a donc $a^n x^n \in I$ (car I est un idéal) et finalement, $ax \in R(I)$.
2. - Soit $x \in R(I \cap J)$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I \cap J$. Ainsi, $x \in R(I)$ et $x \in R(J)$. Finalement,
   $$R(I \cap J) \subset R(I) \cap R(J)$$
   - Soit $x \in R(I) \cap R(J)$. Il existe alors $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x^n \in I$ et $x^m \in J$. Si par exemple $m \geq n$. On alors $x^m = \underbrace{x^n}_{\in I} \underbrace{x^{m-n}}_{\in A} \in I$. Ainsi, $x^m \in I \cap J$. Finalement,
   $$R(I) \cap R(J) \subset R(I \cap J)$$
   - Soit $u \in R(I) + R(J)$: il existe $(x, y) \in R(I) \times R(J)$ tel que $u = x + y$. Il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x^n \in I$ et $y^m \in J$. Alors, d'après la formule du binôme, $u^{n+m} = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m}{k} x^k \underbrace{y^m}_{\in J} y^{n-k}}_{\in J} + \underbrace{\displaystyle\sum_{k=n}^{n+m} \binom{n+m}{k} \underbrace{x^n}_{\in I} x^{k-n} y^{n+m-k}}_{\in I} \in I + J$. Ainsi,
   $$R(I) + R(J) \subset R(I + J)$$
3. - Supposons que n ne soit divisible par aucun carré. On note $n = p_1 ... p_m$ la décomposition primaire de n. Montrons que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$. On a déjà $n\mathbb{Z} \subset R(n\mathbb{Z})$. Soit $x \in R(n\mathbb{Z})$. Il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $x^\ell \in n\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x^\ell = nk$. Soit p un diviseur premier de n. On a $p | x^\ell$. Si on avait $PGCD(p, x) = 1$, par Gauss, on aurait $p | x^{\ell-1}$ et en itérant, $p | 1$ ce qui est absurde. Ainsi, $p | x$.

     Finalement, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $p_i | x$. Par corollaire du théorème de Gauss, $n | x$ et finalement, $x \in n\mathbb{Z}$.
   - Supposons qu'il existe p premier tel que $p^2 | n$. Notons la décomposition primaire de n : $p_1^{a_1} ... p_m^{a_m}$ avec $a_1 \geq 2$. Soit $x = p_1 p_2 ... p_m$. On a $x^{\max(a_1, ..., a_m)} \in n\mathbb{Z}$ et donc $x \in R(n\mathbb{Z})$. Mais $x \notin n\mathbb{Z}$. Finalement par contraposée, on a montré que si $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, alors la décomposition primaire de n ne comporte pas d'exposant ≥ 2.

4.6 Exercice 535

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n.

Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $|P(k)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

On va utiliser la base des polynômes de Hilbert pour mettre en avant les valeurs prises par P en les entiers de $[\![0,n]\!]$. Ainsi, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on pose $H_j := \frac{1}{j!}\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$. La famille $(H_0,\dots,H_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degré donc c'en est une base. Ainsi,

$$\exists - a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ P = \sum_{j=0}^{n} a_j H_j.$$

On a alors le résultat suivant (que nous admettons pour le moment) :

$$a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k). \qquad (\star)$$

De plus, pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, $\deg(H_j) \leqslant n-1$ et $\deg(P) = n$ donc le coefficient dominant de P est égal au coefficient dominant de a_nH_n. Comme P est unitaire, on obtient que $a_n = n!$ et donc

$$n! = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k).$$

Il reste donc à montrer que cette somme est majorée par $2^n|P(k)|$ pour un certain $k \in [\![0,n]\!]$. Ceci s'obtient aisément par inégalité triangulaire et formule du binôme :

$$n! = |n!| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |P(k)| \leqslant \max_{k\in[\![0,n]\!]}(|P(k)|) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \max_{k\in[\![0,n]\!]}(|P(k)|).$$

Montrons la relation $(\star)$. Tout d'abord, on remarque que $H_j(k) = 0$ si on prend un entier $k < j$ donc, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(k) = \sum_{j=0}^{k} a_j H_j(k)$. Par Fubini, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} a_j H_j(k) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k H_j(k).$$

Or, par changement d'indice $\ell = k-i$, on a $j! \times H_j(k) = \prod_{i=0}^{j-1}(k-i) = \prod_{\ell=k-j+1}^{k} \ell = \frac{k!}{(k-j)!}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} (-1)^k \underbrace{\binom{n}{k}\binom{j}{k}}_{=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}} = \sum_{j=0}^{n} a_j \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k}$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = \sum_{j=0}^{n} a_j \binom{n}{j} (1-1)^{n-j} = a_n.$$

4.7 Exercice 536

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
a) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
b) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
c) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$?

1. Si $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ alors nécessairement P est non constant. Réciproquement, si P non constant, alors le théorème de D'Alembert donne $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
2. Si $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(x)$ donc $P - \overline{P}$ a une infinité de racines et $P = \overline{P}$. Ainsi, $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ implique que P est de degré impair. Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré impair, alors $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3. Si $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$. On note n le degré de P alors $P(0),P(1),\cdots,P(n)$ sont rationnels et P est l'unique polynôme de degré n prenant ces valeurs en $0,1,\ldots n$. On peut obtenir P par interpolation de Lagrange ce qui montre que $P\in\mathbb{Q}[X]$. De plus, la fonction $x\in\mathbb{R}\mapsto P(x)$ n'est ni majorée, ni minorée donc P est de degré impair que l'on note d. On va montrer que $d=1$.
   Il existe un entier non nul a tel que $Q=aP\in\mathbb{Z}[X]$ et comme $a\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ donc on a toujours $Q(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$. On note alors $Q=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ et on s'intéresse à l'équation $Q(r)=\frac{1}{m}$ d'inconnue $r\in\mathbb{Q}$ où m est un nombre premier fixé.
   En écrivant $r=\frac{p}{q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $p\wedge q=1$, on obtient alors
   $$P(r)=\frac{1}{m}\Longleftrightarrow m\sum_{k=0}^{d}a_kp^kq^{d-k}=q^d$$
   Ainsi, $m|q^d$ et comme m est premier, $m|q$ et donc $m^d|q^d$. On suppose que $d\geqslant 0$. Alors $d^2|q^d$ et $m^2|m\sum_{k=0}^{d-1}a_kp^kq^{d-k}$ donc $m^2|ma_dp^d$ donc $m|a_dp^d$. Ainsi, si on choisit $m>|a_d|$ alors $m|p$ ce qui est absurde ($p\wedge q=1$). On a donc $d=1$.
   Réciproquement, si $P=aX+b$ avec a et b dans $\mathbb{Q}$, on a bien $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$.

4.8 Exercice 557

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\det\left((i\wedge j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$.
Ind. On rappelle que, pour $N\in\mathbb{N}^*, N=\sum_{d|N}\varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

On note M la matrice $(i\wedge j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On va montrer que M est le produit de deux matrices triangulaires « simples » ce qui donnera directement son déterminant.
En partant de l'indication, on a, pour tout couple (i,j)
$$i\wedge j=\sum_{k|i\wedge j}\varphi(k)=\sum_{k|i \text{ et } k|j}\varphi(k).$$
Ainsi, en notant T la matrice carrée de taille n définie par $T_{i,j}=\begin{cases}\varphi(j) & \text{si} \quad i|j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, on obtient que
$$i\wedge j=\sum_{k|j}T_{i,k}.$$
On pose alors U la matrice carrée de taille n définie par $U_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad i|j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et on a
$$i\wedge j=\sum_{k=1}^{n}T_{i,k}U_{k,j}.$$
Ainsi, $M=TU$ et donc $\det(M)=\det(U)\det(A)$. De plus, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $i|i$ et pour tout couple $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$, si $i>j$, $i\not|j$ donc T et U sont triangulaires supérieures, les coefficients diagonaux de T sont $\varphi(1),\ldots,\varphi(n)$ et ceux de U sont tous égaux à 1. Finalement, $\det(M)=\prod_{k=1}^{n}\varphi(k)$.

4.9 Exercice 627

Soient $(E,\langle\rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $v_1,\ldots,v_{n+2}$ des vecteurs de E. Montrer qu'on ne peut avoir : $\forall i\neq j,\langle v_i,v_j\rangle<0$.

On montre le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. (Il peut être intéressant de faire une dessin en dimension 2 pour comprendre le problème).

1. Initialisation : $n=1$.
   On suppose donc que E est de dimension 1 et on suppose qu'il existe trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 tels que $\forall i\neq j,\langle v_i,v_j\rangle<0$. Nécessairement ces trois vecteurs sont non nuls donc $E=Vect(v_1)$ et il existe deux réel a et b tels que $v_2=av_1$ et $v_3=bv_1$. Alors, $\langle v_1,v_2\rangle=a\|v_1\|^2$ donc $a<0$ et de même $b<0$ mais alors, $\langle v_2,v_3\rangle=ab\|v_1\|^2>0$ d'où la contradiction.

2. Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai dans tout espace euclidien de dimension $n-1$. On considère alors E euclidien de dimension n et on suppose qu'il existe $v_1, \dots, v_{n+2}$ des vecteurs de E tels que $\forall i \neq j, \langle v_i, v_j\rangle < 0$. Alors $v_{n+2} \neq 0$ et $E = D \oplus D^\perp$ où D est la droite dirigée par v_{n+2}.
Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, il existe $u_i \in D^\perp$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $v_i = u_i + \lambda_i v_{n+2}$ et on a

$$\forall i \neq j,\ \langle v_i, v_j\rangle = \langle u_i, u_j\rangle + \lambda_i\lambda_j \|v_{n+2}\|^2.$$

De plus λ_i est du signe de $\langle v_i, v_{n+2}\rangle$ donc $\lambda_i\lambda_j > 0$ et $\langle u_i, u_j\rangle < 0$.
On a donc construits des vecteurs $(u_1, \dots, u_{n+1})$ d'un espace euclidien $D^\perp$ de dimension $n-1$ donc les produits scalaires 2 à 2 sont strictement négatifs, ce qui est absurde par hypothèse de récurrence, d'où l'hérédité.

4.10 Exercice 630

Soient E un espace euclidien, A une partie de E et $B = \{< x, y > \ \mid x, y \in A\}$. Montrer que A est fini si et seulement si B est fini.

Solution 1 :
$\Longrightarrow$ est trivial.
Supposons B fini.
Tout se passe dans $vect(A)$, donc on peut supposer $E = vect(A)$.
On se donne alors $C = (e_1, ..., e_n)$ une base de E formée d'éléments de A.
Soit $(y_1, ..., y_n)$ la base duale, ie telle que $< y_i, . >= e_i^*$.
Si $x \in A$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n < x, e_i > y_i$. $< x, e_i > \in B$, donc x ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Solution 2 :
On montre la réciproque par récurrence sur la dimension de E.
• Si E est de dimension 1. On suppose que B est fini. Si $a = \{0\}$, c'est bon. Sinon, on choisit x non nul dans A et on considère l'application $f : y \in A \longmapsto < x|y >$.
Montrons qu'elle est injective. En effet, soient y e tz dans A tels que $f(y) = f(z)$. Alors $y - z \perp x$. Or x est non nul et E de dimension 1 donc $y - z = 0$ d'où $y = z$. De plus, f est à valeurs dans B qui est fini donc la partie A est finie.
• Soit $n \geqslant 2$ tel que le résultat soit vrai dans tout espace euclidien de dimension au plus $n-1$.
On suppose que E est de dimension n et que B est fini. Si $A = \{0\}$, il n'y a rien à faire. Sinon, on fixe x non nul dans A et on considère l'application $f : y \in A \longmapsto < x|y >$.
Soit $b \in B$. Alors il existe $y_0 \in A$ tel que $< x|y_0 >= b$ et $f^{-1}(\{b\}) = \{y \in A;\ y - y_0 \in \{x\}^\perp\}$.
On pose $A' := \{y - y_0;\ y \in f^{-1}(\{b\})\} \subset x^\perp$ et comme $x \neq 0$, $x^\perp$ est un espace euclidien de dimension $n-1$. De plus, si $y - y_0$ et $z - y_0$ sont dans A,

$$< y - y_0 | z - y_0 >=< y|z > - < y|y_0 > - < z|y_0 > + < y_0|y_0 >=< y|z > - < y|y_0 > - < z|y_0 > +b$$

donc $B' := \{< y|z >;\ (y, z) \in (A')^2\} \subset \{b_1 - b_2 - b_3 + b;\ (b_1, b_2, b_3) \in B^3$ et B' est un ensemble fini. Par hypothèse de récurrence, A' est donc finie. Ainsi, $f^{-1}(\{b\})$ est finie pour tout $b \in B$ donc A est finie, ce qui prouve l'hérédité.

4.11 Exercice 678

Soient $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que f admet un extremum global. Que se passe-t-il si $n = 1$?

Soit $y_0 \in f(\mathbb{R}^n)$. On pose $K = f^{-1}(\{y_0\})$ et $U = \mathbb{R}^n \setminus K$. Alors $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{y_0\})$. Si y_0 n'est pas un extremum de f alors $f(U)$ n'est pas un intervalle et comme f est continue U a a moins deux composantes connexes par arcs. Or K est compact par hypothèse donc U a au moins une composante connexe par arc non bornée que l'on note C et c'est la seule composante non bornée car K est inclus dans une boule fermée. Alors $I = f(C)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient par y_0. Si $I \subset]y_0, +\infty[$ alors $f(\mathbb{R}^n \setminus C) \subset]-\infty, y_0]$. De plus $\mathbb{R}^n \setminus C$ est bornée et fermée donc compacte donc $f|_{\mathbb{R}^n \setminus C}$ admet un minimum m qui est inférieur ou égal à y_0 et donc m est le minimum de f. De même, si $f(C) \subset]-\infty, y_0[$ alors f a un maximum.

4.12 Exercice 698

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{d \in \mathbb{N}; d \mid n \text{ et } \sqrt{\frac{n}{2}} \leqslant d \leqslant \sqrt{2n}\right\}$ et $d_n = |D_n|$.

1. **(d_n) est-elle convergente ?**
2. **(d_n) est-elle bornée ?**

1. En considérant $\varphi : n \longmapsto 2^{2n+1}$ on vérifie que 2 est une valeur d'adhérence de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en considérant $\varphi : n \longmapsto p_n$ où p_n est le n-ème nombre premier, on vérifie que 0 est une valeur d'adhérence de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite a donc au moins 2 valeurs d'adhérences donc elle diverge.
2. On pose $\varphi : n \longmapsto 2((2n)!)^2$. Alors $\sqrt{\varphi(n)/2} = (2n)!$ et $\sqrt{2\varphi(n)} = 2(2n)!$.
   Pour tout $n \geqslant 1$, on pose alors, pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, $a_k = (2n-1)! \times (2k)$.
   Alors, pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, $(2n)! \leqslant a_k \leqslant 2 \times (2n)!$ et $a_k | \varphi(n) = 2((2n)!)^2$ (car $k|(2n)!$) donc $a_k \in D_{\varphi(n)}$ et donc $d_{\varphi(n)} \geqslant n$. Ainsi, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

4.13 Exercice 722

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

L'hypothèse u décroissante n'est pas utile. Si la série $\sum\limits_n v_n$ converge alors la suite v converge vers 0 et donc $n^2u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2u_n}$ et par comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \dfrac{1}{n^2u_n}$ converge, où n_0 est un rang à partir duquel $n^2u_n \neq 0$. Soit à présent $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=n_0}^{N} \sqrt{u_n}\frac{1}{n\sqrt{u_n}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=n_0}^{N} u_n}\sqrt{\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n^2u_n}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=n_0}^{N} u_n}\sqrt{\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^2u_n}}.$$

Par comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

4.14 Exercice 754

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer : $120\left(\displaystyle\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f'')^2$.

On va procéder par IPP pour trouver une relation entre $\displaystyle\int_0^1 f$ est une intégrale faisant intervenir f''. La majoration viendra naturellement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
On fait donc deux IPP successives :

$$\int_0^1 f = [tf(t)]_0^1 - \int_0^1 tf'(t)dt = -\left[\frac{t^2}{2}f'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^2}{2}f''(t)dt = -\frac{f'(1)}{2} + \int_0^1 \frac{t^2}{2}f''(t)dt.$$

On est donc amené à estimer $f'(1)$, ce qu'on va obtenir avec la formule de Taylor avec reste intégral entre x et 1 avec $x \in [0,1]$:

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \int_1^x (x-t)f''(t)dt = (x-1)f'(1) + \int_1^x (x-t)f''(t)dt.$$

En évaluant en 0, on obtient que $f'(1) = \displaystyle\int_0^1 tf''(t)dt$ et en reprenant le calcul précédent, on obtient

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^2-t)f''(t)dt \text{ et donc } \left(\int_0^1 f\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 (t^2-t)f''(t)dt\right)^2$$

. Avec Cauchy-Schwarz, on a alors :

$$4\left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 (t^2-t)^2dt \int_0^1 (f'')^2 = \frac{1}{30}\int_0^1 (f'')^2$$

d'où l'inégalité demandée.

4.15 862-MinesPonts-MP

On note T le triangle plein défini par les points $(0,0),(1,0)$ et $(0,1)$. Déterminer le minimum sur T de la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2+\dfrac{1}{2}(1-x-y)$.

T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$: c'est donc un compact. f est une fonction continue : par théorème, f admet sur K un maximum et un minimum.

Soit $a\in K$ tel que $f(a)=\max\limits_K f$ et $b\in K$ tel que $f(b)=\max\limits_K f$.

Nous allons étudier f sur $\overset{\circ}{T}$ et sur ∂T.

- Recherchons les extrema de f sur $\overset{\circ}{T}$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

  Ainsi, f admet dans $\overset{\circ}{T}$ un unique point critique de coordonnées $(1/4,1/4)$.
  De plus

$$H_f(1/4,1/4)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

  qui est définie positive. f admet donc en $(1/4,1/4)$ un minimum local. On a $f(1/4,1/4)=3/8$
- Étudions f sur ∂T.
  - Sur $T_1=\{0\}\times[0,1]$, on a $f(x,y)=y^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}y$. On a donc $\max\limits_{T_1} f=1$ et $\min\limits_{T_1} f=\dfrac{7}{16}$.
  - Sur $T_2=[0,1]\times\{0\}$, on obtient de même, $\max\limits_{T_2} f=1$ et $\min\limits_{T_2} f=\dfrac{5}{8}$.
  - Sur $T_3=\{(x,1-x),x\in[0,1]\}$, on a $f(x,y)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$. On obtient $\min\limits_{T_3} f=\dfrac{1}{2}$ et $\max\limits_{T_3} f=1$.

Finalement

$$\max_T f=1 \text{ et } \min_T f=\frac{3}{8}$$

4.16 863-MinesPonts-MP

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $f(0,0)=1$ et $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^x$ si $(x,y)\neq(0,0)$.

1. **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**
2. **Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.**
3. **La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?**
4. **Étudier les variations de $g:x\mapsto f(x,0)$.**
5. **Déterminer les extrema de f.**

1. Par opération sur les fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus, pour $r\neq 0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, on a $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=e^{2r\cos\theta\ln r}\to 1$ lorsque $r\to 0$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$.
2. Par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
3. Soit $t\neq 0$. On a $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\dfrac{e^{2t\ln|t|}-1}{t}\sim 2\ln|t|$ lorsque $t\to 0$. Comme $\ln t\to-\infty$ lorsque $t\to 0$, f n'est pas dérivable dans la direction $(1,0)$ en $(0,0)$.

   On a aussi $\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$ donc f est dérivable dans la direction $(0,1)$ en $(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $g(x) = e^{2x\ln|x|}$. g est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, $g'(x) = 2(1+\ln|x|)e^{2x\ln|x|}$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-1/e$		$1/e$		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$e^{2/e}$	$\searrow$	$e^{-2/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. D'après la question précédente, en $(0,0)$, f n'admet pas d'extremum local.
   f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\ln(x^2+y^2) + 2\frac{x^2}{x^2+y^2})(x^2+y^2)^x$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)^x$$

(x,y) est donc un point critique ssi $\begin{cases} \ln(x^2+y^2) + 2\dfrac{x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$

Cela équivaut à $(x = 0 \text{ et } \ln y^2 = 0)$ ou $(y = 0 \text{ et } \ln(x^2) + 2 = 0)$.
Finalement, les points critiques sont

$$\{(0,1), (0,-1), (e^{-1},0), (-e^{-1},0)$$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Étudions les hessiennes en chacun de ces points.

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0,1) < 0$: on a un point selle.

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a de même un point selle.

$$H_f(e^{-1},0) = \begin{pmatrix} 2e^{1-2e^{-1}} & 2e^{-2e^{-1}} \\ 2e^{-2e^{-1}} & 2e^{-2e^{-1}} \end{pmatrix} = 2e^{-2e^{-1}} \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix}$$

$\det H_f(e^{-1},0) > 0$, $\operatorname{tr}(H_f(e^{-1},0)) > 0$: f admet un minimum local en $(e^{-1},0)$.

$$H_f(-e^{-1},0) = \begin{pmatrix} -2e^{1-2e^{-1}} & 2e^{-2e^{-1}} \\ 2e^{-2e^{-1}} & -2e^{-2e^{-1}} \end{pmatrix} = 2e^{-2e^{-1}} \begin{pmatrix} -e & 1 \\ 1 & -e \end{pmatrix}$$

$\det H_f(-e^{-1},0) > 0$, $\operatorname{tr}(H_f(e^{-1},0)) < 0$: f admet un maximum local en $(-e^{-1},0)$.

4.17 864-MinesPonts-MP

Soit $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ sinon.

1. Montrer que f est continue.

2. Étudier les extrema de f.

1. Par opération sur les fonctions continues, f est continue sur $(\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0\}$. Il reste donc à étudier la continuité en $(0,0)$.
   Soit $r > 0$, $\theta \in [0,\pi/2]$. On a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin\theta}{(r\cos\theta+1)(r\sin\theta+1)(\cos\theta+\sin\theta)} \longrightarrow 0$$

lorsque $r \to 0$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$.

2. • On étudie f sur $\{0\}\times\mathbb{R}_+\cup\mathbb{R}_+\times\{0\}$: f y est nulle. Comme par ailleurs, f prend des valeurs positives, f est minimale sur ces deux demi-droites.
   • On étudie les extrema de f sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Comme f y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce sont alors des points critiques de f. Or, pour $x>0$ et $y>0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(y+1)(y-x^2)}{((x+1)(y+1)(x+y))^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x+1)(x-y^2)}{((x+1)(y+1)(x+y))^2}$$

On a donc un unique point critique qui est $(1,1)$.
On a

$$H_f(1,1)=\begin{pmatrix}-1/16 & 1/32\\ 1/32 & -1/16\end{pmatrix}$$

On a $\det H_f(1,1)>0$ et $\operatorname{tr}(H_f(1,1))<0$. f présente donc en $(1,1)$ un maximum local. On a $f(1,1)=1/8$.

C'est même un maximum global : en effet, si $x>0$ et $y>0$, on a $0\leq f(x,y)\leq\dfrac{xy}{xy(x+y)}\leq\dfrac{1}{x+y}$. Cette inégalité est aussi valable si $x=0$ ou $y=0$. Cela montre que $f(x,y)\to 0$ lorsque $||(x,y)||_1\to+\infty$.

Il existe donc $A>0$ tel que si $||(x,y)||_1\geq A$, alors $0\leq f(x,y)\leq\dfrac{1}{16}$. Sur $\left(\mathbb{R}^+\right)^2\cap B_f(0,A)$, qui est compact, f admet un maximum. D'après l'étude précédente, ce maximum est atteint en $(1,1)$.

4.18 865-MinesPonts-MP

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une forme linéaire sur E. Montrer que l'application $g:x\in E\mapsto f(x)e^{-\|x\|^2}$ admet un minimum et un maximum, puis déterminer ce maximum et ce minimum.

Soit $x\in E\setminus\{0_E\}$. On a $g(x)=f\left(\dfrac{x}{||x||}\right)||x||e^{-||x||^2}$.

Soit $\phi:u>0\mapsto ue^{-u^2}$. ϕ est dérivable et pour tout $u>0$, $\phi'(u)=(1-2u^2)e^{-u^2}$. Ainsi, d'après les variations de ϕ, ϕ est maximale en $u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$.

Ainsi, pour $x\in E\setminus\{0_E\}$, $g(x)\leq f\left(\dfrac{x}{||x||}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$.

L'ensemble $S(0,1)=\{x\in E,||x||=1\}$ est un fermé borné de E qui est de dimension finie, et est donc compact. f y est continue donc, il existe donc $x_0\in S(0,1)$ tel que $f(x_0)=\max\limits_S(f)=|||f|||$.

Pour $x\in E\setminus\{0_E\}$, on a donc $g(x)\leq|||f|||\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ (et cette inégalité est vraie en 0_E).

De plus, $g(\dfrac{x_0}{\sqrt{\sqrt{2}}})=f(x_0)\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Finalement, g admet un maximum et

$$\max g=\frac{|||f|||}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

Enfin, g est impaire donc g admet un minimum et

$$\min g=-\max g$$

.

4.19 866-MinesPonts-MP

Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$ vérifiant $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. On pourra faire le changement de variables $u=xy,v=\dfrac{x}{y}$.

- Si u, v, x et y sont des réels strictement positifs, on a $\left\{\begin{array}{l} u = xy \\ v = \dfrac{x}{y} \end{array}\right.$ ssi $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{u/v} \end{array}\right.$.

  Soit f une solution de l'équation. On pose, $g : (u,v) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \mapsto f(\sqrt{uv}, \sqrt{\dfrac{u}{v}})$. g est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $f(x,y) = g(xy, \dfrac{x}{y})$.

  On a pour $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x/y) + \frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}(xy, x/y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(xy, x/y) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v}(xy, x/y) + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(xy, x/y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x/y) - \frac{x}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v}(xy, x/y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(xy, x/y) - 2\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(xy, x/y) + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(xy, x/y) + 2\frac{x}{y^3}\frac{\partial g}{\partial v}(xy, x/y)$$

  et ainsi

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(xy, x/y) - 2\frac{x}{y}\frac{\partial g}{\partial v}(xy, x/y)$$

  Finalement, par théorème de Schwarz,

$$\forall (u,v) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, 2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$$

  Soit $v > 0$ et $\phi : u > 0 \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$. On a pour tout $u > 0$, $2u\phi'(u) - \phi(u) = 0$. Il existe donc $\lambda_v \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u > 0$, $\phi(u) = \lambda_v\sqrt{u}$. On note $\lambda : v > 0 \mapsto \lambda_v$. Comme ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$, λ est de classe $\mathcal{C}^1$.

  On a ainsi, pour tout $(u,v) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \lambda(v)\sqrt{u}$.

  Soit $u > 0$, et $\psi : v > 0 \mapsto g(u,v)$. ψ est dérivable et pour tout $v > 0$, $\psi'(v) = \lambda(v)\sqrt{u}$. Soit Λ une primitive de λ. Il existe $\mu_u \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(v) = \Lambda(v)\sqrt{u} + \mu_u$. On pose $M : u \mapsto \mu_u$. Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ car g et Λ le sont.

  On a pour tout $(u,v) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $g(u,v) = \Lambda(v)\sqrt{u} + M(u)$.

  On conclut qu'on a pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $f(x,y) = \Lambda(x/y)\sqrt{xy} + M(xy)$.

- Réciproquement, soit $A, B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et soit $f : (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \mapsto A(x/y)\sqrt{xy} + M(xy)$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}A'(x/y)\sqrt{xy} + A(x/y)\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + yM'(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}A''(x/y)\sqrt{xy} + \frac{A'(x/y)}{\sqrt{xy}} - A(x/y)\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}} + y^2M''(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}A'(x/y)\sqrt{xy} + A(x/y)\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + xM'(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{x}{y^3}A'(x/y)\sqrt{xy} + \frac{x^2}{y^4}A''(x/y)\sqrt{xy} - \frac{x\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}}A'(x/y) - A(x/y)\frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}} + x^2M''(xy)$$

  et ainsi,

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

4.20 870-MinesPonts-MP

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t$.

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ **et**

$$D = \left\{\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}); \forall (f,g) \in E^2, \phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f)\right\}.$$

2. Montrer que la famille $(\phi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, avec : $\phi_i : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

3. Montrer que D est de dimension finie.

1. On a $f(x) - f(0) = \int_0^1 df((tx)(x)dt$. Or, $df(tx)(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ d'où l'égalité.

2. Les ϕ_i sont des formes linéaires définies sur E. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i = 0$. Alors, pour toute $f \in E$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$. En particulier, avec $f_i : x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ (qui est bien dans E puisque linéaire), on obtient $\lambda_i = 0$.

3. Montrons D est un ev de base $(\phi_1, ..., \phi_n)$.

   - D est un sev de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$: OK
   - Les ϕ_i sont dans D : soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $(f, g) \in E^2$. On a $\phi_i(fg) = f(0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) + g(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ i.e. $\phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f)$.
   - $(\phi_1, ..., \phi_n)$ est génératrice de D : soit $\phi \in D$. On a $\phi(1) = \phi(1.1) = 2\phi(1)$ donc $\phi(1) = 0$. Soit $f \in E$. On note $f_i : x \mapsto x_i$ et $g_i : x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$.

     f_i est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$.

     g_i l'est aussi : on le montre par récurrence, en appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

     - pour $t \in [0, 1]$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car f l'est.
     - pour $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in [\![1, n]\!]^k$, $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) =$ est continue et intégrable sur $[0, 1]$
     - pour $R > 0$ de $\mathbb{R}^n$, $x \in B_f(0, R)$, $j \in [\![1, n]\!]^k$, $t \in [0, 1]$ $|\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)| \leq \max_{B_f(0,R)} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|$ (qui existe bien car $B_f(0, R)$ compact et la fonction est continue). D'où la domination.
     - Ainsi, par théorème, les $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ existent et sont continues : g_i est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(tx)dt$.
     - On procède de même pour l'hérédité : on fixe $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir montré que g_i est de classe $\mathcal{C}^k$ et qu'on a pour $(i_1, ..., i_k) \in [\![1, n]\!]^k$, $\frac{\partial^k g_i}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x) = \int_0^1 t^k \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k} \partial x_i}(tx)dt$ et en faisant comme dans l'initialisation, on montre que g est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

       On a, par linéarité de ϕ,

$$\begin{aligned}
\phi(f) &= f(0)\phi(1) + \sum_{i=1}^{n} \phi(f_i g_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)g_i(0) + \phi(g_i)f_i(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)\phi_i(f)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)\phi_i$. Cela montre que $(\phi_1, ..., \phi_n)$ est génératrice de D. Comme elle est aussi libre, c'est une base de D.

4.21 871-MinesPonts-MP

Soient $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right), k \in [0, 1[$ **tels que :** $\forall a \in \mathbb{R}^2, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \leqslant k$**. Soit** (u_n) **définie** par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ **et** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f\left(u_n, u_{n+1}\right)$**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$**, on pose :** $a_n = \max\left(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|\right)$**.**

1. **Montrer :** $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, \exists c \in \mathbb{R}^2, f(b) - f(a) = (b - a \mid \nabla f(c))$**.**
2. **Montrer que :** $\forall \left(x, y, x', y'\right) \in \mathbb{R}^4, \left|f(x, y) - f\left(x', y'\right)\right| \leqslant k \max\left(|x - x'|, |y - y'|\right)$**.**
3. **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \leqslant k a_n$**, puis qu'il existe deux constantes** q **et** C **telles que :** $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant C q^n$**.**
4. **Montrer que** (u_n) **est une suite convergente et donner une propriété vérifiée par sa limite.**

1. Soit $(a, b) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$. On pose $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(ta + (1 - t)b) \end{array}\right.$. On a :
   - ϕ continue sur $[0, 1]$
   - ϕ dérivable sur $]0, 1[$

   D'après le théorème des accroissements finis, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(t_0)$. Notons $c = t_0 a + (1 - t_0)b$. On a $\phi'(t_0) = (b - a|\nabla f(c))$ et donc $f(b) - f(a) = (b - a)|\nabla f(c))$.
2. Soit $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. D'après la question 1, il existe $c \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) - f(x', y') = ((x - x', y - y')|\nabla f(c))$ i.e.
$$f(x, y) - f(x', y') = (x - x')\frac{\partial f}{\partial x}(c) + (y - y')\frac{\partial f}{\partial y}(c)$$
   Ainsi,
$$\begin{array}{rcl} |f(x, y) - f(x', y')| & \leq & |x - x'|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c)\right| + |y - y'|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(c)\right| \\ & \leq & \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(c)\right|\right).\max(|x - x'|, |y - y'|) \\ & \leq & k\max(|x - x'|, |y - y'|) \end{array}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \max([u_{n+3} - u_{n+2}|, |u_{n+4} - u_{n+3}|) \\ & = & \max(|f(u_{n+1}, u_{n+2}) - f(u_n, u_{n+1})|, |f(u_{n+2}, u_{n+3}) - f(u_{n+1}, u_{n+2})|) \\ & \leq & \max(k\max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|), k\max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+3} - u_{n+2}|)) \\ & \leq & \max(k\max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|), \underbrace{k^2}_{\leq k}\max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|)) \\ & \leq & k a_n \end{array}$$
   Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$a_{2n} \leq k^n a_0$$
   ie si m pair,
$$a_m \leq k^{m/2} a_0 \leq k^{(m-1)/2} a_0$$
   et
$$a_{2n+1} \leq k^n a_1$$
   ie si m impair,
$$a_m \leq k^{(m-1)/2} a_1$$
   .

   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n \leq k^{\frac{n-1}{2}}\max(a_0, a_1)$$
   On pose $q = \sqrt{k}$ et $C = \frac{\max(a_0, a_1)}{\sqrt{k}}$ et on a bien pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq C q^n$.
4. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq a_n \leq C q^n$ avec $q < 1$. Ainsi, $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge et donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge et finalement, (u_n) converge.

   Notons ℓ sa limite. Par continuité de f, comme on a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$, on a
$$\ell = f(\ell, \ell)$$

4.22 872-MinesPonts-MP

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, K une partie compacte non vide de Ω, f une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

1. **On suppose que $\Delta f > 0$. Montrer que f n'admet pas de maximum local.**
2. **On suppose que $\Delta f \geqslant 0$. Montrer que $\max_K f = \max_{\mathrm{Fr}(K)} f$.**

1. Soit $x_0 \in \Omega$. Supposons que f admet en x_0 un maximum local. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0) = 0$. Or, $\Delta f(x_0) > 0$, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) > 0$. On a donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) > 0$.

   Supposons par exemple qu'on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $x_0 + t(1,0) \in \Omega$ (cela existe puisque Ω est ouvert).

   Soit $\phi : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(1,0))$. ϕ est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\phi'(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$ donc sur un voisinage $]-\delta, \delta[$ de 0, on a $\phi' > 0$ et ainsi, ϕ est strictement croissante $]-\delta, \delta[$. Comme $\phi(0) = 0$, on a $\phi < 0$ sur $]-\delta, 0[$ et $\phi > 0$ sur $]0, \delta[$.

   Finalement, $t \mapsto f(x_0 + t(1,0))$ admet un minimum local strict en 0. Cela contredit le fait que f admet en x_0 un maximum local.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On pose : $gx \in \Omega \mapsto f(x) + \varepsilon(x^2 + y^2)$. g est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $(x,y) \in \Omega$, $\Delta g(x,y) = \Delta f(x,y) + 4\varepsilon > 0$. g n'admet donc pas de maximum local dans Ω.

   Comme K est compact, $\max_K f$ et $\max_K g$ existent et de même, $\max_{\partial K} f$ et $\max_{\partial K} g$ existent. Notons $M > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in K$, $x^2 + y^2 \leq M$.

   Comme $\Delta g > 0$, $\max_K g$ n'est pas atteint dans $\overset{\circ}{K}$: on a donc pour tout $(x,y) \in K$, $g(x,y) \leq \max_{\partial K} g$. Fixons $(x,y) \in K$. On a
   $$f(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2) \leq \max_{\partial K} g \leq \max_{\partial k} f + \varepsilon M$$
   Cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$. On peut faire $\varepsilon \to 0$ et obtenir
   $$f(x,y) \leq \max_{\partial K} f$$

4.23 Exercice 875

Pour $x = (x_0, \ldots, x_n)$ et $y = (y_0, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on pose

$$f(x,y) = \left(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=k}} x_i y_j \right)_{k \in [\![0, 2n]\!]} \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

1. **Soient $x, y \in \left(\mathbb{R}^{n+1}\right)^2$ non nuls. Montrer que $f(x,y)$ est non nul.**
2. **Soient u et v les applications de $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ définies par $u : x \mapsto f(x,x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{f(x,x)}{\|f(x,x)\|}$ où $\|\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Calculer les différentielles de u et v.**
3. **Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul. Calculer $\mathrm{rg}(\mathrm{d}v(x))$.**

On note $f(x,y)_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j$.

1. Soit $m = \max\{i \in [\![0, n]\!], x_i \neq 0\}$ et $p = \max\{j \in [\![0, n]\!], y_j \neq 0\}$. Alors,
   $$\begin{aligned} f(x,y)_{m+p} &= \sum_{i=m+1}^{n} \underbrace{x_i}_{0} y_{m+p-i} + x_m y_p + \sum_{i=0}^{m-1} x_i \underbrace{y_{m+p-i}}_{0} \\ &= x_m y_p \neq 0 \end{aligned}$$
   donc $f(x,y)$ n'est pas nul.

2. • f est bilinéaire donc différentiable. u est donc aussi différentiable et pour $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $h \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$du(x)(h) = 2f(x,h).$$

• La fonction $g : x \in E \mapsto (u(x)|u(x))$ est donc différentiable sur E et pour $x \in E$ et $h \in E$,

$$\begin{aligned} dg(x)(h) &= 2(du(x)(h)|u(x)) \\ &= 4(f(x,h)|f(x,x)) \end{aligned}$$

• La fonction $\alpha : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$ est différentiable (car g ne s'annule pas) et pour $x \in E \setminus \{0\}$ et $h \in E$, $d\alpha(x)(h) = -\dfrac{1}{2g(x)\sqrt{g(x)}} dg(x)(h)$.

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \forall h \in E, d\alpha(x)(h) = -\frac{2(f(x,h)|f(x,x))}{||f(x,x)||^3}$$

• Par bilinéarité de $(\lambda, w) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda w$, v est différentiable et pour $x \in E \setminus \{0\}$ et $h \in E$, $dv(x)(h) = \dfrac{1}{||f(x,x)||} du(x)(h) - \dfrac{2}{||f(x,x)||^3}(f(x,h)|f(x,x))f(x,x)$

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \forall h \in E, dv(x)(h) = \frac{2(f(x,x)|f(x,x))f(x,h) - 2(f(x,h)|f(x,x))f(x,x)}{||f(x,x)||^3}$$

3. On s'intéresse à $\ker dv(x)$. Soit $h \in \ker dv(x)$: on a $(f(x,x)|f(x,x))f(x,h) = (f(x,h)|f(x,x))f(x,x)$: il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x,h) = \alpha f(x,x)$ i.e. $f(x, h - \alpha x) = 0$. D'après la question 1, on a donc $h - \alpha x = 0$ et ainsi, $h = \alpha x$.

   Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h = \alpha x$. On a $dv(x)(h) = \dfrac{2\alpha(f(x,x)|f(x,x))f(x,x) - 2\alpha(f(x,x), f(x,x))f(x,x)}{||f(x,x)||^3} = 0$.

   Ainsi, $\dim \ker dv(x) = 1$ et par théorème du rang $\mathrm{rg} dv(x) = n$.

4.24 Exercice 876

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective ;
ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.
a) Calculer $\mathrm{d}g$.
b) Montrer que g admet un minimum.
c) En déduire que f est surjective.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) =< f(x) - a|f(x) - a >$ et f est différentiable donc, par bilinéarité du produit scalaire, g l'est également et on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \ dg(x)(h) = 2 < f(x) - a|df(x)(h) > .$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\sqrt{g(x)} = \|f(x) - f(0) + f(0) - a\| \geqslant \|f(x)\| - \|f(a)\|$$

   Ainsi, $g(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De plus, g est minorée par 0 donc $\inf(g)$ existe. On le note m. Alors, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $x \in\notin B_f(0,R)$, $g(x) \geqslant m+1$. En suite, $B_f(0,R)$ est compacte et g est continue donc sa restriction à cette boule fermée admet un minimum qui est nécessairement m.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_0) = \min(g)$. Alors, x_0 est un point critique de g donc $dg(x_0) = 0$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $< f(x_0) - a|df(x_0)(h) >= 0$. Or $df(x_0)$ est bijective (endomorphisme injectif en dimension finie) donc, pour tout $k \in \mathbb{R}^n$, $< f(x_0) - a|k >= 0$ et donc $f(x_0) = a$.
   Finalement, on a montré que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = a$ donc f est surjective.

4.25 Exercice 891

On suppose que lorsqu'un enfant naît, il a une chance sur deux d'être un garçon. Dans une famille donnée, le nombre d'enfants est la variable aléatoire Z et le nombre de filles est X.

1. **Montrer : $\forall t \in [0,1]$, $G_X(t) = G_Z\left(\dfrac{1+t}{2}\right)$.**

2. Expliciter la loi de X si $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. La loi conditionnelle de X sachant $(Z = j)$ est $\mathcal{B}(j, \dfrac{1}{2})$. D'après la formules des probabilités totales, si $k \in \mathbb{N}$, on a
$$P(X = k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} \frac{1}{2^j} P(Z = j)$$
Ainsi, pour $t \in [0, 1]$, on a, par Fubini,
$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} \frac{1}{2^j} P(Z = j) t^k \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{t^k}{2^j} P(Z = j) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t}{2}\right)^j P(Z = j) \\ &= G_Z\left(\frac{1+t}{2}\right) \end{aligned}$$

2. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)}$ et ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G^{(k)}(0) = \dfrac{\lambda^k}{2^k} e^{-\frac{\lambda}{2}}$.
Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\lambda/2}$. On conclut que $X \sim \mathcal{P}(\lambda/2)$.

4.26 Exercice 901 (niveau MPSI)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$ dont on note m l'espérance.

1. Montrer qu'on a $V(X) \leq (b - m)(m - a)$.

2. Montrer que cette inégalité est optimale.

1. On a
$$\begin{aligned} 0 &\geq E((X - a)(X - b)) \\ &\geq E((X - m + m - a)(X - m + m - b)) \\ &\geq E((X - m)^2 + (X - m)(2m - a - b) + (m - a)(m - b)) \\ &\geq \underbrace{E((X - m)^2)}_{V(X)} + (m - a)(m - b) \end{aligned}$$

2. D'après la chaîne des inégalités qui précèdent, les cas d'égalités se produisent lorsque $E(\underbrace{(X - a)(X - b)}_{\leq 0} = 0$ donc lorsque $(X - a)(X - b) = 0$ ps.
Ainsi, si $X(\Omega) \subset \{a, b\}$, on a bien égalité.

4.27 Exercice 902

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$ et on suppose que les racines du polynôme caractéristique de M ne sont pas toutes simples.

1. Montrer que M admet un vecteur propre de la forme $V = (v_1, \ldots, v_n, 0)^T$.

2. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)^T$ est vecteur propre de A et orthogonal à b.

3. Soient $X_1, \dots, X_5$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$.

On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$. Montrer que la probabilité que le polynôme caractéristique de la matrice N n'ait que des racines simples est supérieure ou égale à $3p^3 - 2p^4$.

1. M est symétrique donc diagonalisable. De plus, χ_M n'est pas simplement scindé : il admet donc au moins une racine multiple λ. Soit (e, f) une famille libre de vecteurs propres associés à la valeur propre λ : on les notes $e = (e_1, ..., e_{n+1})$ et $f = (f_1, ..., f_{n+1})$. Alors $f_{n+1}e - e_{n+1}f$ est non nul (puis que (e, f) est libre), est aussi vecteur propre pour la valeur propre λ et a sa dernière composante nulle. C'est notre vecteur V.
2. L'égalité $AV = \lambda V$ s'écrit $A(v_1, ..., v_n)^T = \lambda(v_1, ..., v_n)^T$ et $b^T(v_1, ..., v_n) = 0$ i.e. $(b|(v_1, ..., v_n)) = 0$.
3. La négation de E_1 : "le polynôme caractéristique de la matrice N n'a que des racines simples" est E_2 :" χ_N n'a pas que des racines simples". Comme N est symétrique, cet évènement est inclus dans E_3" Il existe $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ vecteur propre de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_5 \\ 0 & X_5 & -1 \end{pmatrix}$ et orthogonal à (X_1, X_2, X_3)".

   On cherche à minorer $P(E_1)$. Or, $P(E_1) = 1 - P(E_2) \geq 1 - P(E_3)$.
   On va donc calculer $P(E_3)$.
   On recherche donc l'existence de $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 2v_1 = \lambda v_1 \\ v_2 + X_5 v_3 = \lambda v_2 \\ X_5 v_2 - v_3 = \lambda v_3 \\ X_1 v_1 + X_2 v_2 + X_3 v_3 = 0 \end{cases}$$

   On peut procéder par disjonction de cas résumés dans un tableau :

X_5	X_1	X_2	X_3	Solution ?	λ	v	proba
0	0	0	0	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$(1-p)^4$
0	0	0	1	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$(1-p)^3 p$
0	0	1	0	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$(1-p)^3 p$
0	0	1	1	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$(1-p)^2 p^2$
0	1	0	0	*oui*	1	$(0, 1, 0)$	$(1-p)^3 p$
0	1	0	1	*oui*	1	$(0, 1, 0)$	$(1-p)^2 p^2$
0	1	1	0	*oui*	-1	$(0, 0, 1)$	$(1-p)^2 p^2$
0	1	1	1	*non*			
1	0	0	0	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$p(1-p)^3$
1	0	0	1	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$p^2(1-p)^2$
1	0	1	0	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$p^2(1-p)^2$
1	0	1	1	*oui*	2	$(1, 0, 0)$	$p^3(1-p)$
1	1	0	0	*oui*	$\sqrt{2}$	$(0, 1, \sqrt{2} - 1)$	$p^2(1-p)^2$
1	1	0	1	*non*			
1	1	1	0	*non*			
1	1	1	1	*non*			

   Ainsi, $P(E_3) = (1-p)^4 + 4(1-p)^3 p + 6p^2(1-p)^2 + p^3(1-p) = 1 - 3p^3 + 2p^4$.
   Finalement, $P(E_1) \geq 3p^3 - 2p^4$.

4.28 908-MinesPonts-MP

Soient $p, q \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Soit $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

- Si $X \neq Y$, M est diagonalisable puisqu'elle a deux valeurs propres distinctes et est de taille 2. On

$$\begin{aligned}
P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2} p^2 \\
&= p^2 \frac{1}{1 - (1-p)^2} \\
&= \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

- Si $X = Y$, M n'est pas diagonalisable car $\mathrm{Sp}(M) = \{X\}$ et si M était diagonalisable, elle serait semblable à la Xi_2 et serait donc égale à XI_2 ce qui n'est pas le cas.
- Finalement, la probabilité recherchée est $\dfrac{p}{2-p}$.

4.29 909-MinesPonts-MP

Soient $p \in]0,1[, X$ une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$.

1. **Montrer que la variable Y suit une loi géométrique.**
2. **Montrer que les variables Y et $2Y - X$ sont indépendantes.**

1. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= P((X = 2k-1) \sqcup (X = 2k)) \\
&= P(X = 2k-1) + P(X = 2k) \\
&= (1-p)^{2k-2} p + (1-p)^{2k-1} p \\
&= ((1-p)^2)^{k-1} (p(2-p))
\end{aligned}$$

On a bien $(1-p)^2 + p(2-p) = 1$ et $Y \sim \mathcal{G}(p(2-p))$.

2. - Déterminons la loi de $2Y - X$. Si X est pair, notons $X = 2k$, on a $Y = k$ donc $2Y - X = 0$.

   Si X est impair, notons $X = 2k+1$, on a $Y = k+1$ donc $2Y - X = 1$. Ainsi, $2Y - X$ suit une loi de Bernoulli. Le paramètre p' de la loi est

$$\begin{aligned}
p' &= P(2Y - X = 1) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} p \\
&= \frac{p}{1 - (1-p)^2}
\end{aligned}$$

   - Prouvons l'indépendance de Y et $2Y - X$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
P(Y = k, 2Y - X = 0) &= P(Y = k, X = 2k) \\
&= P(X = 2k) \\
&= (1-p)^{2k-1} p \\
&= P(Y = k)(1 - p') \\
&= P(Y = k) P(2Y - X = 0)
\end{aligned}$$

   Et, $P(Y = k, 2Y - X = 1) = P(Y = k) P(2Y - X = 1)$ car $(Y = k)$ et $(2Y - X = 0)$ étant indépendants, $(Y = k)$ et $\overline{(2Y - X = 0)}$ le sont aussi.

   On a bien montré l'indépendance de Y et $2Y - X$.

4.30 Exercice 911

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) < +\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose : $F_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tX}\right)$.

1. **Montrer que F_X est bien définie (à valeurs réelles) et continue.**
2. **Montrer la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} F_X(t)\mathrm{d}t$.**
3. **Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+Y}\right)$.**
4. **Généraliser à m variables i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.**

1. Soit $t \geq 0$. $e^{-tX} \geq 0$ donc on a, d'après la formule de transfert, $F_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{-tx} P(X = x)$. Or, pour $t \geq 0$, $e^{-tx}P(X = x) \leq P(X = x)$ et $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable donc $F_X(t)$ est bien définie et est réel.

   Pour la continuité : si $X(\Omega)$ est fini, alors F_X est une somme finie de fonctions continues donc est continue.

   Si $X(\Omega)$ est dénombrable : on note $\{x_0, x_1, ...\}$ ses éléments. On a donc aussi (on peut sommer dans l'ordre que l'on veut) $F_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-tx_n} P(X = x_n)$. On va appliquer le théorème de continuité des séries de fonctions :

   - Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \geq 0 \mapsto e^{-tx_n} P(X = x_n)$ est continue
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum \underbrace{||f_n||_{\infty,\mathbb{R}^+}}_{=P(X=x_n)}$ converge donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

   Ainsi, $\sum f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. On montre la convergence en faisant une intégration terme à terme (dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$).

   On a :

   - Les f_k sont continues et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
   - $\sum f_k$ converge simplement vers F_X
   - F_X est continue

   On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} F_X(t)dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-tx_n} P(X = x_n)dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) \int_0^{+\infty} e^{-tx_n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x_n} P(X = x_n) \\
&= E(\frac{1}{X})
\end{aligned}$$

   Cette quantité étant finie, on a bien la convergence et l'intégrale et on a obtenu sa valeur qui est $E(1/X)$.

3. $X + Y$ est une var discrète à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Vérifions qu'on a $\frac{1}{X+Y} \in L^1$ pour obtenir ensuite : $E(\frac{1}{X+Y}) = \int_0^{+\infty} F_{X+Y}(t)dt$.

   Or, $\frac{1}{X} \in L_1$: cela vient de la formule de transfert et de la convergence de $\sum \frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p$. De plus, $0 \leq \frac{1}{X+Y} \leq \frac{1}{X}$ donc $\frac{1}{X+Y} \in L^1$.

   Or, $F_{X+Y}(t) = E(e^{-t(X+Y)}) = E(e^{-tX}e^{-tY})$. Or, X et Y sont indépendantes sont e^{-tX} et e^{-tY} aussi et par propriété de l'espérance, $F_{X+Y}(t) = F_X(t)F_Y(t) = F_X(t)^2$.

   Or, $F_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-tk}(1-p)^{k-1}p = pe^{-t}\frac{1}{1-(1-p)e^{-t}}$, donc $F_{X+Y}(t) = p^2 \frac{e^{-2t}}{(1-(1-p)e^{-t})^2}$.

Ainsi, par intégration par parties (bien possible par $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}$ a une limite finie en $+\infty$)

$$\begin{aligned}
E(\frac{1}{X+Y}) &= p^2\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{e^{-t}}{(1-(1-p)e^{-t})^2}dt \\
&= p^2[-\frac{1}{1-p}\frac{e^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}]_0^{+\infty} - \frac{p^2}{1-p}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}dt \\
&= \frac{p}{1-p} - \frac{p^2}{(1-p)^2}[\ln(1-(1-p)e^{-t})]_0^{+\infty} \\
&= \frac{p}{1-p} + \frac{p^2}{(1-p)^2}\ln p
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{X+Y}$ est d'espérance finie et son espérance est $\dfrac{p}{1-p} + \dfrac{p^2}{(1-p)^2}\ln p$.

4. Avec m variables aléatoires, on fait le même raisonnement et on a à calculer $I_m = p^m\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-mt}}{(1-(1-p)e^{-t})^m}dt$. En faisant une intégration par parties, on obtient

$$I_m = \frac{1}{m-1}\frac{p}{1-p} - \frac{p}{1-p}I_{m-1}$$

et ainsi, avec $A = \dfrac{p}{1-p}$,

$$\begin{aligned}
I_m &= \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1}\frac{A^k}{m-k} + (-1)^{m-1}A^{m-1}I_1 \\
&= \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{m-k+1}\frac{A^{m-k}}{k} + (-1)^m A^m\ln p \\
&= A^m(-1)^m\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{k+1}A^{-k}}{k} + (-1)^m A^m\ln p
\end{aligned}$$

4.31 Exercice 965

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$. Indic : utiliser une série entière

On sait que pour $x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}x^k$.

Ainsi, pour $x\in]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}x^k$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{2k}{k}x^k$$

Par produit de Cauchy, si $x\in]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}[$, $\sum w_n x^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}$$

Mais, pour $x\in]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}2^{2n}x^{2n}$$

donc, unicité du DSE de $\dfrac{1}{\sqrt{1-16x^2}}$, on a pour $\ell\in\mathbb{N}$,

$$w_{2\ell+1} = 0,$$

et

$$w_{2\ell} = \binom{2\ell}{\ell} 2^{2\ell}$$

4.32 Exercice Mines 1

1.(a) Soit $i \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt$ est bien définie et donner sa valeur.

(b) A l'aide de $R = a_0 + a_1(X+1) + \cdots + a_{n-1}(X+1)\cdots(X+n-1) + (X+1)\cdots(X+n)$, donner la valeur de

$$m = \operatorname{Inf}\left\{\int_0^{+\infty} (a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n)^2 e^{-x} dx \mid (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a, l) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^n([a, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} l$ et $f^{(n)}(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [a, +\infty[$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, il existe $g_k(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n-1} k^i \frac{f^{(i)}(x)}{i!} = f(x+k) - f(x) - g_k(x) \quad \textbf{et} \quad |g_k(x)| \leq \frac{k^n}{n!} \sup_{[x,x+k]} |f^{(n)}|.$$

(b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f^{(i)}(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

1. (a) Soit $i \in \mathbb{N}$. $f_i : t \mapsto t^i e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrable sur le segment $[0, 1]$. Par croissances comparées, $t^i e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ $[t \to +\infty]$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f_i est intégrable sur $[1, +\infty[$ et finalement f_i est intégrable sur $\mathbb{R}$: $I_i = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt$ est bien définie.
Par intégration par parties, on trouve que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $I_i = iI_{i-1}$. Par récurrence, on prouve alors que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $I_i = i!$.

(b) On peut munir $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. (Bien défini par ce qui précède et on vérifie aisément qu'il s'agit bien d'un produit scalaire). On cherche donc $m = d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2$. On sait que si p est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $m = \|X^n - p(X^n)\|^2$. Si on écrit $(-a_0, \cdots, -a_{n-1})$ les coordonnées de $p(X^n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On traduit que $P = X^n - p(X^n)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, i.e. orthogonal à X^i pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$(X^n|X^i) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X^k|X^i) = 0$$

et avec la question précédente,

$$(n+i)! + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (k+i)! = 0$$

En divisant par $i!$, on reconnaît $R(i) = 0$.
Comme R est unitaire de degré n, $R = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} (X - i)$.
On a alors, P étant orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$:

$$\begin{aligned} m &= (P|P) \\ &= (X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k | P) \\ &= (X^n|P) \\ &= (X^n|X^n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X^n|X^k) \\ &= (n!)\left(\frac{(2n)!}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(n+k)!}{n!}\right) \\ &= n!R(n) \\ &= (n!)^2 \end{aligned}$$

2. (a) La formule de Taylor appliquée à f à l'ordre $n-1$ entre x et $x+k$ donne

$$f(x+k)-f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}k^i\frac{f^{(i)}(x)}{i!}+\int_x^{x+k}(x+k-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}dt.$$

On pose donc $g_k(x)=\displaystyle\int_x^{x+k}(x+k-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}dt$. On a, par inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$|g_k(x)|\leq\int_x^{x+k}(x+k-t)^{n-1}\frac{|f^{(n)}(t)|}{(n-1)!}dt$$

$$|g_k(x)|\leq\frac{1}{(n-1)!}\sup_{[x,x+k]}|f^{n)}|\int_x^{x+k}(x+k-t)^{n-1}dt.$$

Le calcul de l'intégrale conduit à l'inégalité voulue.

(b) Soit $x\in[A,+\infty[$. Posons $X(x)=\begin{pmatrix}f'(x)\\ \vdots\\ f^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}$, $B(x)=\begin{pmatrix}f(x+1)-f(x)-g_1(x)\\ \vdots\\ f(x+n-1)-f(x)-g_{n-1}(x)\end{pmatrix}$ et $A=(a_{k,i})_{(k,i)\in[\![1,n-1]\!]^2}$ avec pour $(k,i)\in[\![1,n-1]\!]^2$, $a_{k,i}=\dfrac{k^i}{i!}$. On a alors

$$AX(x)=B(x).$$

Or $\det(A)\neq0$ car après avoir factorisé $\dfrac{1}{i!}$ pour la colonne i et k pour la ligne k, on reconnaît un déterminant de Vandermonde. Si on note $A^{-1}=(c_{k,i})_{(k,i)\in[\![1,n-1]\!]^2}$, et
$B(x)=(b_k(x))_{1\leq k\leq n-1}$ on a alors, pour $i\in[\![1,n-1]\!]$,

$$f^{(i)}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}c_{i,k}b_k(x)$$

et donc

$$|f^{(i)}(x)|\leq\sum_{k=1}^{n-1}|c_{i,k}||b_k(x)|.$$

Or avec les hypothèses, on a pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $b_k(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$. On conclut par linéarité, puis domination.

5 Centrale

5.1 1211-Centrale-MP

Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini commutatif tel que le nombre d'automorphismes de G est 3.

1. **Donner la définition d'un automorphisme. Montrer que $\varphi:x\mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.**
2. **Montrer que, pour tout $x\in G, x^2=e$.**
3. **Montrer que G possède un sous-groupe V d'ordre 4 et préciser les automorphismes de V.**

1. φ va de G vers G. $\varphi^2=Id_G$ dont φ est bijectif. De plus, c'est un morphisme car si $(x,y)\in G^2$ alors $\varphi(xy)=(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$ car G est commutatif et finalement, $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$.
2. On a $\varphi^2=Id$. Ainsi, dans le groupe des automorphismes de G, l'ordre de φ divise 2. Mais d'après Lagrange, il divise aussi 3. L'ordre de φ est donc 1. Cela veut dire que $\varphi=Id_G$. Finalement, pour tout $x\in G$, $x^{-1}=x$ i.e. $x^2=e$.
3. On a $G\neq\{e\}$ puisque $\{e\}$ n'a qu'un seul automorphisme. Soit $x\in G\setminus\{e\}$.
   On a $G\neq\{e,x\}$ car $\{e,x\}$ n'a que deux automorphismes. Soit $y\in G\setminus\{e,x\}$. Posons $V=\{e,x,y,xy\}$. On vérifie que V est un sous-groupe de G. Il est d'ordre 4.
   Il y a 6 les bijections de V vers V qui laissent fixes e. Pour chaque bijection, pour savoir si c'est un morphisme, on regarde si on a pour tout $(a,b)\in V^2$, $f(ab)=f(a)f(b)$: cela revient à vérifier uniquement qu'on a $f(xy)=f(x)f(y)$ $(*)$. En effet, si cela est vérifié, alors $f(x.xy)=f(y)$ d'une part et $f(x)f(xy)=f(x)f(x)f(y)=f(y)$ d'autre part et, de même, $f(yxy)=f(x)=f(y)f(xy)$.
   Or, si $a=x$, $b=y$ et $c=xy$, on a $ab=c$, $ac=b$, $bc=a$ donc la condition $(*)$ sera toujours vérifiée.
   Finalement, l'ensemble des automorphismes de V est d'ordre 6.

5.2 1212-Centrale-MP

Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 3[4]$ et $C = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x = y^2\}$.

1. Rappeler l'énoncé du petit théorème de Fermat. Montrer que $-1 \notin C$.

On pose $\pi_x = \prod_{y \in C \setminus \{x\}} (x+y)$ pour $x \in C \setminus \{0\}$ et $\pi = \prod_{x \neq y \in C} (x+y)$.

2. Déterminer le cardinal de C.

3. Montrer que $\forall x \in C \setminus \{0\}, \pi_x = \pi_1$.

4. Calculer π.

1. Supposons que $-1 \in C$, alors il existe $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $-1 = a^2$. On a $a \neq 0$ car $-1 \neq 0$. Ainsi, $PGCD(a,p) = 1$. D'après le petit théorème de Fermat, on a donc, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $a^{p-1} = 1$ et donc comme $\dfrac{p-1}{2}$ est un entier, $\left(a^2\right)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ soit $(-1)^{(p-1)/2} = 1$. Or, $\dfrac{p-1}{2}$ est impair donc $(-1)^{(p-1)/2} = -1$ et $-1 \neq 1$ car $p \neq 2$. On obtient une contradiction. On peut donc conclure qu'on a $-1 \notin C$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ou } x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x \end{aligned}$$

   Or, si $x \neq 0$, alors $x \neq -x$.
   Ainsi :
   - $0^2 = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $x^2 \neq 0$
   - si $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est un carré, alors c'est le carré d'exactement deux éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   On a donc $1 + \dfrac{p-1}{2}$ carrés.
3. Soit $x \in C \setminus \{0\}$. On a $\pi_x = x^{\frac{p-1}{2}} \prod_{y \in C \setminus \{x\}} (1 + yx^{-1})$. Or l'application $f : y \in C \mapsto yx^{-1}$ est une bijection de C dans C : en effet :
   - si $y \in C$: il existe $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $y = a^2$. Il existe aussi $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $x = b^2$. Ainsi, $yx^{-1} = (ab^{-1})^2 \in C$.
   - f est bijective car si $g : y \in C \mapsto xy$, alors $f \circ g = g \circ f = Id_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$.

   De là, on déduit qu'on a $\prod_{y \in C \setminus \{x\}} (1 + yx^{-1}) = \prod_{y \in C \setminus \{1\}} (1 + y) = \pi_1$. Finalement,

$$\pi_x = x^{\frac{p-1}{2}} \pi_1$$

   Mais, $x^{(p-1)/2} = b^{p-1} = 1$ donc finalement, $\pi_x = \pi_1$.
4. On peut déjà remarquer que π est un carré car pour $x \neq y$, dans le produit, se trouvent les termes $x + y$ et $y + x$.
   De plus,

$$\begin{aligned} \pi &= \prod_{x \in C} \pi_x \\ &= \pi_0 \pi_1^{(p-1)/2} \end{aligned}$$

   Or, π_0 est un carré (produit de carrés) et π aussi donc $\pi_1^{(p-1)/2}$ aussi. Mais, $\pi_1^{p-1} = 1$ donc $\pi_1^{(p-1)/2} = 1$ ou -1. -1 est impossible (ce n'est pas un carré) donc finalement, $\pi_1^{(p-1)/2} = 1$. Finalement, $\pi = \pi_0$.
   Si $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} x^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 &\Leftrightarrow x^4 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = -1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \end{aligned}$$

   puisque -1 n'est pas un carré.
   Dans $\prod_{x \in C \setminus \{0\}} x$: il y a 1 et $\dfrac{p-3}{2}$ autres termes (un nombre pair donc). On regroupe chaque carré avec son inverse. Finalement, $\pi_0 = 1$ et $\pi = 1$.

5.3 1213-Centrale-MP

On pose $u = 2 + \sqrt{3}, v = 2 - \sqrt{3}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.

1. **Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier.**
2. **Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Qu'en déduire sur la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$?**
3. **Soit q un nombre premier. On munit l'ensemble $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ des deux lois de composition interne définies par :**

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \text{ et } (x,y)\cdot(x',y') = (xx' + 3yy', xy' + x'y)\,.$$

   (a) **Montrer que les deux lois précédentes munissent B d'une structure d'anneau commutatif fini.**
   (b) **Montrer que, si 3 n'est pas un carré modulo q, alors l'anneau précédent est un corps.**
   (c) **On note $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$. Montrer que l'application π définie par $\pi(a + b\sqrt{3}) = (\bar{a}, \bar{b})$ est bien définie et est un morphisme surjectif d'anneaux de A dans B.**

4. **On suppose n premier. Montrer que, si M_n divise s_{n-2} alors M_n est premier.**
   Ind. On pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus petit facteur premier q de M_n et déterminer l'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ dans le groupe des éléments inversibles de l'anneau B.

1. On raisonne par contraposée : on suppose que n n'est pas premier et on l'écrit $n = ab$ avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$. On a alors $M_n = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\displaystyle\sum_{i=0}^{b-1} 2^{ia}$. Or, $2^a - 1 \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{b-1} 2^{ia} \neq 1$ donc M_n n'est pas premier.

2. $s_{n+1} = u^{2^{n+1}} + v^{2^{n+1}} = \left(u^{2^n}\right)^2 + \left(v^{2^n}\right)^2 = \left(u^{2^n} + v^{2^n}\right)^2 - 2u^{2^n}v^{2^n}$. Or, $uv = 1$ donc $s_{n+1} = s_n^2 - 2$.
   On a d'autre part $s_0 = 2$: on peut donc conclure que la suite (s_n) est une suite d'entiers naturels.

3. (a)
   - $+$ est une loi de composition interne, associative, commutative, qui admet $(0,0)$ pour neutre et telle que tout élément de B admet un symétrique pour $+$ dans B.
   - . est une loi de composition interne, associative (à vérifier), commutative, qui admet $(1,0)$ pour neutre.
   - Pour $(x,y,x',y',x'',y'') \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^6$, on vérifie que $(x,y).((x',y') + (x'',y'')) = (x,y).(x',y') + (x,y).(x'',y'')$

   (b) Notons que $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est un corps puisque q est premier.
   Supposons que 3 n'est pas un carré modulo 3 et montrons que B est un corps. En effet, soit $(x,y) \in B \setminus \{(0,0)\}$. Supposons par exemple qu'on a $x \neq 0$. Soit $(x',y') \in B$. On a

$$\begin{aligned}(x,y).(x',y') = (1,0) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} xx' + 3yy' = 1 \\ xy' + x'y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2x' + 3yxy' = x \\ xy' + x'y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2x' - 3x'y^2 = x \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

   Or, $x^2 - 3y^2 \neq 0$ (si c'était nul, on aurait $3 = y^2x^{-2}$ serait un carré) donc le système précédent une unique solution : $(x(x^2 - 3y^2)^{-1}, -(x^2 - 3y^2)^{-1}y)$. Ainsi, (x,y) est inversible pour . : B est bien un corps.

   (c)
   - A est bien un anneau pour les lois usuelles ($+$ et $\times$). De plus, comme $\sqrt{3}$ est irrationnel, tout élément de A s'écrit de façon unique sous la forme $a + b\sqrt{3}$. (En effet, si on a $a + b\sqrt{3} = a' + b'\sqrt{3}$ alors $b = b'$ ou $\sqrt{3} = \dfrac{a - a'}{b - b'}$ donc nécessairement $b = b'$ puis $a = a'$.
   - π est bien définie par unicité de l'écriture des éléments de A. C'est un morphisme d'anneaux car :
     - $\pi(1) = (1,0)$ qui est bien le neutre pour .
     - si $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$, $\pi((a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3})) = \pi(a + c + (b+d)\sqrt{3})) = (\overline{a+c}, \overline{b+d}) = (\overline{a} + \overline{c}, \overline{b} + \overline{d}) = \pi(a + b\sqrt{3}) + \pi(c + d\sqrt{3})$
     - $\pi((a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3})) = \pi(ac + 3dc + \sqrt{3}(ad + bc)) = (\overline{ac + 3dc}, \overline{ad + bc}) = (\overline{a}\overline{c} + 3\overline{d}\overline{c}, \overline{a}\overline{d} + \overline{b}\overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b})(\overline{c}, \overline{d}) = \pi(a + b\sqrt{3})\pi(c + d\sqrt{3})$.
   - π est surjectif : soit $(\overline{a}, \overline{b}) \in B$. On a $(\overline{a}, \overline{b}) = \pi(a + b\sqrt{3})$.

4. On suit l'indication : soit q le plus petit facteur premier de M_n. On a donc $q^2 \leq M_n$.
   Comme $M_n | s_{n-2}$, on a $q | s_{n-2}$. Ainsi, $\pi(s_{n-2}) = (\overline{s_{n-2}}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0})$.
   De plus, en remarquant que $uv = 1$, on a $s_{n-2} = u^{2^{n-2}} + v^{2^{n-2}} = v^{2^{n-2}}(u^{2^{n-1}} + 1)$. Comme π est un morphisme, $(\overline{0}, \overline{0}) = \pi(v^{2^{n-2}})\pi(u^{2^{n-1}} + 1)$.

Mais, comme $uv = 1$, $\pi(v^{2^{n-2}})$ est inversible (d'inverse $\pi(u^{2^{n-2}})$) et ainsi, $\pi(u^{2^{n-1}} + 1) = 0$ ie $(\overline{2}, \overline{1})^{2^{n-1}} = (\overline{-1}, \overline{0})$.

Ainsi, $(\overline{2}, \overline{1})^{2^n} = (\overline{1}, \overline{0})$.

L'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ est donc une puissance de 2. Si cet ordre était $< 2^n$, on aurait, $(\overline{2}, \overline{1})^{2^{n-1}} = (\overline{1}, \overline{0})$ ce qui n'est pas le cas. Ainsi, l'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ est 2^n.

Mais, le cardinal des inversibles de B est $\leq q^2 - 1$ donc on a $2^n \leq q^2 - 1 \leq 2^n - 1$: c'est absurde !

5.4 1215-Centrale-MP

1. **Soit G un groupe commutatif fini. Si a et b sont deux éléments de G d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de ab ?**
2. **Soit G un groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.**
3. **Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique.**

1. Notons p l'ordre de a et q celui de b. Montrons que ab est d'ordre pq. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $(ab)^\ell = e$. Alors $(ab)^{p\ell} = e$ donc, comme $ab = ba$, $a^{p\ell}b^{p\ell} = e$ et ainsi $q | p\ell$ et comme $PGCD(q, p) = 1$, d'après Gauss, $q | \ell$.

   De même, $p | \ell$ et finalement, comme p et q sont premiers entre eux, on a $pq | \ell$.

   De plus, $(ab)^{pq} = a^{pq}b^{pq} = ee = e$.

   Ainsi, l'ordre de ab est bien pq.
2. Notons ce $PPCM$ n et notons sa décomposition primaire $n = p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$ avec p_1,...,p_k k nombres premiers distincts et les a_i des entiers naturels non nuls.

   Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Il existe un élément de G dont l'ordre est un multiple de $p_i^{a_i}$: notons cet élément g_i et son ordre $p_i^{a_i} d_i$. Alors, $g_i^{d_i}$ est d'ordre $p_i^{a_i}$.

   Puis, d'après la question précédente, l'ordre de $g_1^{d_1}...g_k^{d_k}$ est $p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$.
3. Soit e le PPCM des ordres des éléments de $\mathbb{F}_p^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{F}_p^*$, on a $x^e = 1$. Ainsi le polynôme $X^e - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ admet $p - 1$ racines distinctes. On a donc $e \geq p - 1$.

   Or, l'ordre de chaque élément de $\mathbb{F}_p^*$ divise $p - 1$ donc $e | p - 1$.

   Finalement, $e = p - 1$.

   Enfin, d'après la question précédente, il existe dans $\mathbb{F}_p^*$ un élément d'ordre $e = p - 1$. Cet élément est un générateur de $\mathbb{F}_p^*$.

5.5 1218-Centrale-MP

1. **Rappeler la définition de l'indicatrice d'Euler, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.**
2. **Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$ (la somme étant restreinte aux diviseurs positifs).**
3. **En déduire le déterminant de A, où $A_{i,j} = i \wedge j$.**

1.
2. On a $\displaystyle\sum_{d|n} \phi(d) = n$. Voici trois démonstrations de ce résultat.

- En classant les éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ en fonction de leur ordre.

  L'ordre d'un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ divise n d'après Lagrange.

  Soit d un diviseur de n. On note $d' = \dfrac{n}{d}$. Soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d. Alors $d.\overline{x} = \overline{0}$ donc $n | dx$ et ainsi, $d' | x$ ie $x \in < \overline{d'} >$. Or, dans $< \overline{d'} >$ qui est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal d, isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, il y a $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.

  Finalement, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il y a $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.

  Cela donne bien $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.

- En s'intéressant à la valeur de $k \wedge n$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \wedge n$ divise n. Ainsi,

$$[\![0, n-1]\!] = \bigsqcup_{d|n} \underbrace{\{k \in [\![0, n-1]\!], k \wedge n = d\}}_{A_d}$$

  Soit d diviseur de n et soit $d' = \dfrac{n}{d}$.
  Les éléments de A_d sont les $d\ell$ avec $\ell \wedge d' = 1$ et $\ell \in [\![0, d'[\![$. Il y en a donc $\varphi(d')$.
  Ainsi, $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ ce qui est bien aussi $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.

- En travaillant dans $\Gamma = \{\dfrac{k}{n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ et en écrivant chaque élément sous forme irréductible.
  On a

$$\Gamma = \bigsqcup_{d|n} \underbrace{\left\{\frac{k}{d}, k \in [\![0, d-1]\!] \text{ et } k \wedge d = 1\right\}}_{\Gamma_d}$$

  L'égalité précédente vient de l'unicité de l'écriture d'une fraction $\dfrac{k}{n}$ sous forme irréductible.
  On a $|\Gamma| = \displaystyle\sum_{d|n} |\Gamma_d|$ ie $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.

3. À l'aide de la question précédente, on va écrire A comme produit matriciel de deux matrices triangulaires.
   Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a

$$i \wedge j = \sum_{d|i\wedge j} \varphi(d)$$

   Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On pose

$$\begin{aligned} b_{i,k} &= \varphi(k) \text{ si } k|i \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} c_{k,j} &= 1 \text{ si } k|j \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

   de sorte qu'on a $A = BC$: en effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} c_{k,j} &= \sum_{k|i, k|j} \varphi(k) \\ &= \sum_{k|i\wedge j} \varphi(k) \\ &= i \wedge j \end{aligned}$$

   Ainsi, $\det A = \det B. \det C$. Comme B et C sont triangulaires, on obtient $\det A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \varphi(i). \prod_{i=1}^{n} 1 = \prod_{i=1}^{n} \varphi(i)$.

5.6 1220-Centrale-MP (MPSI)

1. **Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $\operatorname{Com} A, A$ et $\det A$.**
2. **Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,i} = 2, a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ dans tout autre cas. Calculer le déterminant de A.**
3. **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout i. Montrer que A est inversible.**
4. **Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.**

1. C'est du cours. La relation est $A(\text{com}(A))^T = (\text{com}(A))^T A = (\det A).I_n$

2. Appelons $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}_n$. En développant par rapport à la première ligne, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}_{n+1}$ puis en développant ce second déterminant par rapport à la première colonne, on obtient finalement,

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$$

$r^2 = 2r - 1$ a une unique racine : 1

Il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = An + B$. Or, $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$ donc $A = B = 1$ et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = n + 1$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker A$. On suppose que X n'est pas nul et soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|, i \in [\![1, n]\!]\}$.

Le $k$ième coefficient de AX est $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_{k,p}x_p$ et il vaut 0 puisque $X \in \ker A$.

Ainsi, $a_{k,k}x_k = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq k}^{n} (-a_{k,j})x_j$ et

$$\begin{aligned} a_{k,k}|x_k| &= \left|\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j}x_j\right| \\ &\leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} (-a_{k,j})|x_j| \\ &\leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} (-a_{k,j})|x_k| \end{aligned}$$

Comme $|x_k| \neq 0$, on peut diviser par 0 et obtenir $a_{k,k} \leq \displaystyle\sum_{j=1, j\neq k}^{n} (-a_{k,j})$ ie $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \leq 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, $\ker A = \{0\}$ et A est inversible.

4. Soit $B = A^{-1} = (b_{i,j})$. Supposons qu'il existe (i, j) tel que $b_{i,j} < 0$ et notons $b_{I,J} = \min\{b_{i,j}, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\}$.

Le coefficient (I, J) de AB est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{I,k}b_{k,J}$ et il vaut 0 ou 1 : il est donc positif.

On a donc

$$a_{I,I}b_{I,J} \geq \sum_{k=1, k\neq I}^{n} \underbrace{(-a_{I,k})}_{\geq 0} \underbrace{b_{k,J}}_{\geq b_{I,J}}$$

donc

$$a_{I,I}b_{I,J} \geq \sum_{k=1, k\neq I}^{n} (-a_{I,k})b_{I,J}$$

Comme $b_{I,J} < 0$, on obtient alors

$$a_{I,I} \leq \sum_{k=1, k\neq I}^{n} (-a_{I,k})$$

ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur A.

On a montré que B est à coefficients positifs.

5.7 Exercice 1223

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & a_1 \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. **Donner la définition du polynôme minimal π_A. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.**
2. **Calculer $\det A$ et A^2.**
3. **Montrer que A est diagonalisable ssi $\ker A = \ker A^2$. Donner une condition que les a_i pour que A soit diagonalisable.**

On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1.
2. On peut par exemple utiliser la définition la définition du déterminant par les permutations. Si n est pair, la signature de $(1\ n)(2\ n-1)(3\ n-2)...(\frac{n}{2}\ \frac{n}{2}+1)$ est $(-1)^{n/2}$ et ainsi, $\det A = (-1)^{n/2} a_1 a_2 ... a_n$.

   Si n est impair, la signature de $(1\ n)(2\ n-1)(3\ n-2)...(\frac{n-1}{2}\ \frac{n+1}{2})$ est $(-1)^{(n-1)/2}$ et ainsi, $\det A = (-1)^{(n-1)/2} a_1 a_2 ... a_n$.

   On a $A^2 = \begin{pmatrix} a_1 a_n & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 a_{n-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_3 a_{n-2} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_1 a_n \end{pmatrix}$
3.
   - Supposons A diagonalisable : il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^2 = PD^2P^{-1}$. Or, $\ker D = \ker D^2$ donc $\ker A = \ker A^2$.
   - Supposons que $\ker A = \ker A^2$. Supposons que ces noyaux sont égaux à $\{0\}$. Soit π_{A^2} le polynôme minimal de A^2 : il est simplement scindé car A^2 est diagonale. On le note $\pi_{A^2} = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ (où les λ_i sont deux à deux différents et non nuls). Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $\lambda_{i,1}$ et $\lambda_{i,2}$ les racines carrées de λ_i. Le polynôme $\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_{i,1})(X - \lambda_{i,2})$ est simplement scindé et est annulateur de A. A est donc diagonalisable.

     Supposons maintenant que $\ker A \neq \{0\}$. On alors alors $\pi_{A^2} = X \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ (où les λ_i sont deux à deux différents et non nuls). Le polynôme $X^2 \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_{i,1})(X - \lambda_{i,2})$ est annulateur de A : d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a $\mathbb{C}^n = \underbrace{\ker A^2}_{\ker A} \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(A - \lambda_{i,1} I_n) \oplus \ker(A - \lambda_{i,2} I_n)$. $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces propres de A, A est donc bien diagonalisable.

     On montre ensuite que A est diagonalisable ssi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(a_i = 0 \Rightarrow a_{n+1-i} = 0)$.
   - En effet, supposons qu'on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 0 \Rightarrow a_{n+1-i} = 0$. Soit $I = \{i \in [\![1, n]\!], a_i \neq 0\}$. On a alors $\ker A^2$ et $\ker A$ sont engendrés par $\{e_i, i \notin I\}$. Ainsi, A est diagonalisable.
   - Réciproquement, si A est diagonalisable, alors soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i = 0$. On a $e_i \in \ker A^2$ donc $e_i \in \ker A$ donc $a_{n+1-i} = 0$.

5.8 Exercice 1224

On se place dans $M_n(\mathbb{C})$.

1. **Montrer que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.**
2. **Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C$ et $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Montrer qu'il existe un polynôme f tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$. En déduire que $f(D)^2 = D$.**

On considère la suite $(c_k)_k$ définie par $c_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}, c_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} c_i c_{k-i}$ et le polynôme $\phi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^{k+1}$.

3. **Déterminer le reste de la division euclidienne de ϕ^2 par X^n.**
4. **Trouver un polynôme g tel que, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait $g(N)^2 = I_n + N$.**
5. **Soit A matrice inversible. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{C}[A]$ telle que $R^2 = A$.**

1. Cours.
2. Notons β_1 (β_2, ..., β_n) une racine carrée de α_1 (α_2,...,α_n). Par propriété des polynômes de Lagrange, il existe alors $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\alpha_i) = \beta_i$ et donc tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\alpha_i)^2 = \alpha_i$.

   On a alors $P(D) = \mathrm{Diag}(P(\alpha_1), ..., P(\alpha_n))$ donc $P(D)^2 = D$.
3. On a $\phi^2 = X^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k\right)^2 = X^2 \sum_{k=0}^{2n-2} c_{k+1} X^k$. Le reste de la division euclidienne de ϕ^2 par X^n est $X^2 \sum_{k=0}^{n-3} c_{k+1} X$. C'est donc $\phi - c_{n-1}X^n - X$.
4. Soit Q le quotient de cette division euclidienne. On a donc $\phi^2 = X^n Q + \phi - c_{n-1}X^n - X$ et $\phi^2(N) = \phi(N) - N$.

   Ainsi, $(I_n - 2\phi(N))^2 = I_n - 4\phi(N) + 4\phi^2(N)I_n - 4N$ et finalement, $\left(I_n - 2\phi\left(-\frac{N}{2}\right)\right)^2 = I_n + N$. On peut choisir $g = 1 - 2\phi(-X/2)$
5.
   - Supposons d'abord que A soit de la forme $\lambda I_n + N$ avec $\lambda \neq 0$ et N nilpotente. Soit μ une racine carrée de λ. On a $(\mu g(\frac{N}{\lambda}))^2 = \lambda(I_n + \frac{1}{\lambda}N) = \lambda I_n + N$. Ainsi, il existe $R \in \mathbb{C}[A]$ telle que $R^2 = A$.
   - On factorise χ_A dans $\mathbb{C}[X]$: $\chi_A = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{m_i}$ (avec les λ_i deux à deux différents, non nuls (car A inversible) et les $m_i \in \mathbb{N}^*$). Par le théorème de décomposition des noyaux, on a $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$.

     Soit pour $i \in [\![1, m]\!]$, a_i la restriction de A à $\ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$. Alors $\nu_i = a_i - \lambda_i Id$ est nilpotent. Comme, on a $a_i = \lambda_i Id + \nu_i$, il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_i(a_i)^2 = a_i$.
   - Montrons ici que les projections sur les sous-espaces caractéristiques de A sont des polynômes en A. Notons $Q_j = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors les Q_j sont premiers entre eux dans leur ensemble : il existe donc des polynômes U_1,...,U_n tels que $\sum_{i=1}^{n} U_i Q_i = 1$.Vérifions que $p_i = U_i Q_i(A)$ est la projection sur $\ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$ dans la direction $\bigoplus_{j \neq i} \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$: il suffit de voir que si $x \in \mathbb{C}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i(x)}_{\in \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}}$ qui est la décomposition de x dans $\oplus_{i=1}^{n} \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$.
   - Finalement, soit $P = \sum_{i=1}^{n} P_i U_i Q_i$. On a alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_i(A) p_i$ et $P(A)^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i^2(A) p_i = \sum_{i=1}^{n} P_i^2(a_i) p_i = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i = A$

5.9 1226-Centrale-MP

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{tr}\,(A^n)|}$

1. **Si $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton, montrer que (u_n) converge vers $\rho(A)$.**
2. **Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que (u_n) ne converge pas.**

   On suppose maintenant que A a au moins deux valeurs propres distinctes.
3. **Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de (z^n). Montrer que $\rho(A)$ est valeur d'adhérence de u_n.**

1. Notons λ la valeur propre de A. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\text{tr}(A^n) = d\lambda^n$ donc $u_n = d^{1/n}|\lambda| \to |\lambda|$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a $u_n = \sqrt[n]{|2^n + 2^{-n}|}$. Ainsi, $u_{2n+1} = 0 \to 0$ et $u_{2n} = 2.2^{1/n} \to 2$. La suite (u_n) n'est donc pas convergente.
3. • Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$. On a $\mathbb{U} = \sqcup_{k=0}^{n-1}\{e^{i\theta}, \theta \in [\dfrac{2k\pi}{n}, \dfrac{2(k+1)\pi}{n}[\}$: on a partitionné $\mathbb{U}$ en n arcs de longueur au plus ε.

   Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère $\{1, z^N, z^{2N}, ..., z^{nN}\}$ c'est un ensemble de $n+1$ points. Il existe donc $(i,j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $|z^i - z^j| \leq \varepsilon$ (dans cette famille de $n+1$ points, au moins deux se trouvent dans le même petit arc).

   Supposons par exemple qu'on a $i > j$. Alors, $|z^{i-j} - 1| \leq \varepsilon$ et $N | i-j$ donc $i - j \geq N$.

   Finalement
$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |1 - z^n| \leq \varepsilon$$
   1 est donc valeur d'adhérence de la suite (z^n).

   • Notons λ_1,...,λ_d les valeurs propres de A comptées avec multiplicité et avec λ_1,...,λ_p les valeurs propres de module maximal. On a
$$u_n = \sqrt[n]{|\lambda_1^n + ... + \lambda_d^n|} = |\lambda_1| \sqrt[n]{|1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n + ... + \left(\frac{\lambda_d}{\lambda_1}\right)^n|}$$
   Lorsque $n \to$, si $i \geq p+1$, $\left(\dfrac{z_i}{z_1}\right)^n \to 0$.

   De plus, selon ce qui a été montré avant, il existe ϕ_2 extractrice telle que $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{\phi_2(n)} \to 1$, puis il existe ϕ_3 extractrice telle que $\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)^{\phi_2(\phi_3(n))} \to 1$,..., on construit $\phi = \phi_2 \circ \phi_3 \circ ... \circ \phi_p$ extractrice telle que pour $i \in [\![2, p]\!]$, $\left(\dfrac{z_i}{z_1}\right)^{\phi(n)} \to 1$. Ainsi, $|1 + \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\phi(n)} + ... + \left(\dfrac{\lambda_d}{\lambda_1}\right)^{\phi(n)}| \to p$ et $u_{\phi(n)} \to |\lambda_1|$.

5.10 Exercice 1227

Soit E un espace-vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Pour toute partie $A \subset \mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E); \forall v \in A, u \circ v = v \circ u\}$. L'objectif de l'exercice est d'étudier $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

1. **Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.**
2. **On suppose f nilpotente d'indice n. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.**
3. **Soient G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par un $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f_i = f_{|G_i}$. On suppose que $\pi_{f_1} \wedge \pi_{f_2} = 1$. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) | g(E_1) \subset E_1, g(E_2) \subset E_2, g_{|E_1} \in \mathcal{B}(f_1), g_{|E_2} \in \mathcal{B}(f_2)\}$.**

1.
2. On commence par montrer que $\mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$. On a déjà $\supset$. Soit $a \in E \setminus \ker f^{n-1}$. Alors $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E. Soit $g \in \mathcal{C}(\{f\})$. On décompose $g(a)$ dans la base $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$: $g(a) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a)$. Alors, $g(f^k(a)) = f^k(g(a)) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{k+i}(a)$ i.e. $g(f^k(a)) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(f^k(a))$. Ainsi, g et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i$ coïncident sur la base $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$: elles sont égales. On a bien montré que $g \in \mathbb{K}[f]$. Comme de plus, $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\})) \subset \mathcal{C}(\{f\})$, on a finalement, avec la question 1, $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.
3. On a déjà $\supset$. Pour l'autre inclusion, on a $E_1 = \ker \pi_{f_1}(f)$ et $E_2 = \ker \pi_{f_2}(f)$: en effet, on a $\subset$ et par théorème des noyaux, $E = \ker \pi_{f_1}(f) \oplus \ker \pi_{f_2}(f) = E_1 \oplus E_2$.

   De plus, il existe $(A_1, A_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A_1\pi_{f_1} + A_2\pi_{f_2} = 1$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $\underbrace{A_1.\pi_{f_1}(f)(x)}_{\in E_2} + \underbrace{A_2.\pi_{f_2}(f)(x)}_{\in E_1} = x$. On note $p_1 = A_2\pi_2(f)$ et $p_2 = A_1\pi_1(f)$. p_1 (resp. p_2) est la projection sur E_1 (resp. E_2) dans la direction E_2 (resp. E_1). p_1 et p_2 sont dans $\mathcal{C}(\{f\})$ puisque dans $\mathbb{K}[f]$. Soit $g \in \mathcal{B}(f)$. On a $g \circ p_1 = p_1 \circ g$ et $g \circ p_2 = p_2 \circ g$ donc $g(E_1) \subset E_1$ et $g(E_2) \subset E_2$. On note $g_1 = g_{|E_1}$ et $g_2 = g_{|E_2}$.

   Soit $h_1 \in \mathcal{C}(\{f_1\})$ et h telle que $h_{|E_1} = h_1$ et $h_{|E_2} = 0$. Alors $h \in \mathcal{C}(\{f\})$ donc $g \circ h = h \circ g$ et ainsi, $g_1 \circ h_1 = h_1 \circ g_1$. Finalement, $g_1 \in \mathcal{B}(f_1)$. De même, $g_2 \in \mathcal{B}(f_2)$.

5.11 Exercice 1228

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}, a \in E$ un vecteur unitaire, et H l'hyperplan orthogonal à la droite vectorielle dirigée par a. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H, et p la projection orthogonale sur H.

1. **Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel F de $E, F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$.**
2. **Montrer que, pour $x \in E, p(x) = x - \langle a, x\rangle a$.**
3. **Soit $\Omega = \{x \in E, \langle a, x\rangle \geqslant 0$ et $\langle x, \sigma(x)\rangle \leqslant 0\}$.**
   Montrer les équivalences suivantes, pour $x \in E$:
   i) $x \in \Omega$ si et seulement si $\langle a, x\rangle \geq \|p(x)\|$,
   ii) $x \in \Omega$ si et seulement si $\forall y \in \Omega, \langle x, \sigma(y)\rangle \leqslant 0$.

1. Cours.
2. Cours.
3. i) Soit $x \in E$ qu'on décompose $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\langle x, \sigma(x)\rangle = \langle h + \lambda a, h - \lambda a\rangle = ||h||^2 - \lambda^2$ et d'autre part, $\langle a, x\rangle = \lambda$.
   Ainsi, si $x \in \Omega$, on a $\lambda \geq 0$ et $\langle x, \sigma(x)\rangle \leq 0$ donc $||h||^2 \leq \lambda^2$ et $||h|| \leq \lambda$ soit $||p(x)|| \leq \langle a, x\rangle$.
   Réciproquement, si $\langle a, x\rangle \geq ||p(x)||$, alors $\lambda \geq ||h||$ donc $\langle x, a\rangle \geq 0$ et $\langle x, \sigma(x)\rangle \leq 0$.
   ii) Si pour tout $y \in \Omega$, $\langle x, \sigma(y)\rangle \leq 0$, alors $\langle x, \sigma(x)\rangle \leq 0$ et $\langle x, \sigma(a)\rangle \leq 0$ i.e. $\langle x, a\rangle \geq 0$.
   Réciproquement, si $x \in \Omega$: soit $y \in \Omega$, notons $y = h' + \lambda' a$ avec $h' \in H$ et $\lambda' \in \mathbb{R}^+$. On a $\langle x, \sigma(y)\rangle = \langle h, h'\rangle - \lambda\lambda'$.
   Par Cauchy-Schwarz, $\langle h, h'\rangle \leq ||h||.||h'||$ et avec $||h|| \leq \lambda$ et $||h'|| \leq \lambda'$ donc finalement, $\langle x, \sigma(y)\rangle \leq 0$.

5.12 1230-Centrale-MP (MPSI)

1. **Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 x^k P(x)\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.**
2. **Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, puis que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant n^2$.**

1. Produit scalaire : fait en cours.
   Soit
   $$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & \big((P|1), (P|X), ..., (P|X^{n-1})\big) \end{array}$$
   ϕ est :
   - linéaire
   - injective : soit $P \in \ker\phi$, alors, $(P|1) = (P|X) = ... = (P|X^{n-1}) = 0$ donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$ donc $P = 0$.
   - surjective : par théorème du rang, car ϕ et injective et qu'on a $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$.

   Par bijectivité de ϕ, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\phi(P) = (1, 1, ..., 1)$.
2. On étend le produit scalaire précédent à $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(f|X^k) = (P|X^k)$ i.e. $(f - P|X^k) = 0$. Ainsi, $f - P \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.
   Par théorème de Pythagore, $||f||^2 = ||f - P||^2 + ||P||^2$ donc
   $$||f||^2 \geq ||P||^2$$
   Or,
   $$||f||^2 = \int_0^1 f^2(t)dt$$

et

$$\begin{aligned}
||P_n||^2 &= (P|P) \\
&= (\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i | P) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (X^i|P) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i
\end{aligned}$$

On a bien obtenu

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

On introduit maintenant $P_n = (X(X-1))^n$ et $Q_n = \dfrac{P_n^{(n)}}{||P_n^{(n)}||}$. Vérifions que $(Q_0, ..., Q_{n-1})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

- 0 et 1 sont racines d'ordre i de P_i donc $P_i(0) = P_i'(0) = ... = P_i^{i-1}(0) = 0$ et $P_i(1) = ... = P_n^{(i-1)}(1) = 0$
- on a $\deg Q_i = i$
- soit $k \in [\![0, i-1]\!]$, par intégrations par parties successives, on a

$$\begin{aligned}
(P_i^{(i)}|X^k) &= \int_0^1 P_i^{(i)} X^k \\
&= [P_i^{(i-1)} X^k]_0^1 - k \int_0^1 P_i^{(i-1)} X^{k-1} \\
&= ... \\
&= (-1)^k k! \int_0^1 P_i^{(i-k)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

  Cela montre en particulier que la famille $(P_0^{(0)}, P_1^{(1)}, ..., P_{n-1}^{(n-1)})$ est orthogonale et que $(Q_0, ..., Q_{n-1})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- On a donc $(P|P) = \sum_{i=0}^{n-1} (P|Q_i)^2$. Or, en notant $Q_i = b_0 + b_1 X + ... + b_i X^i$, on a $(P|Q_i) = \sum_{j=0}^{i} b_j \underbrace{(P|X)}_{=1} = Q_i(1)$.

  Finalement,

$$(P|P) = \sum_{i=0}^{n-1} Q_i(1)^2$$

  Il nous reste donc à calculer $Q_i(1)$ c'est-à-dire, $P_i^{(i)}(1)$ et $||P_i^{(i)}||$.
- Par Leibniz, on a

$$P_i^{(i)}(1) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} \frac{i!}{k!} (X-1)^k = i!$$

- Enfin, par intégrations par parties successives,

$$(P_i^{(i)}|P_i^{(i)}) = [P_i^{i-1} P_i^{(i+1)}]_0^1 - \int_0^1 P_i^{(i-1)} P_i^{(i+1)} = ... = (-1)^i \int_0^1 P_i \underbrace{P_i^{2i)}}_{(2i)!} = (-1)^i (2i)! \int_0^1 P_i$$

  et à nouveau par intégrations par parties successives,

$$\int_0^1 x^i (x-1)^i dx = (-1)^i \frac{i!^2}{(2i+1)!}$$

  Finalement,

$$||P_i^{(i)}|| = \frac{i!}{\sqrt{2i+1}}$$

- Conclusion,

$$(P|P) = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = n^2$$

5.13 1231-Centrale-MP

1. **Montrer que l'application** $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ **est un produit scalaire sur** $\mathbb{R}[X]$**.**
2. **Soit** (E,ϕ) **un espace euclidien et** $B=(e_1,\dots,e_n)$ **une base de** E**. Montrer que la matrice** $(\phi(e_i,e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ **est symétrique définie positive.**
3. **Pour tout** $p\in\mathbb{N}$**, on pose** $L_p = \dfrac{d^p}{dX^p}\left[X^p(1-X)^p\right] \in \mathbb{R}[X]$**. Montrer que la famille** (L_p) **est orthogonale pour le produit scalaire de la question** 1**. Est-elle orthonormale ?**
4. **Soit** $M = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$**. Montrer que la matrice** M **est symétrique définie positive et calculer** $\det M$**.**

1.
2.
   - Soit $A=(\phi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}$. Par symétrie du produit scalaire, A est bien symétrique.
   - Soit $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$.

     On a

$$\begin{aligned}
X^TAX &= X^T\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n x_j\phi(e_1,e_j)\\ \sum_{j=1}^n x_j\phi(e_2,e_j)\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j\phi(e_n,e_j)\end{pmatrix}\\
&= X^T\begin{pmatrix}\phi(e_1,x)\\ \phi(e_2,x)\\ \vdots\\ \phi(e_n,x)\end{pmatrix}\\
&= \phi(x,x)\ge 0
\end{aligned}$$

     Comme $\phi(x,x)=0 \Rightarrow x=0_E$, on a bien montré que A est symétrique définie positive.
3. On note $K_p=(X(1-X))^p$: K_p est de degré $2p$ (L_p est donc de degré p) et admet 0 et 1 comme racines d'ordre p.

   Soit $Q\in\mathbb{R}_{p-1}[X]$. Par intégrations par parties successives

$$\begin{aligned}
(Q|L_p) &= \int_0^1 QL_p\\
&= \underbrace{[QK_p^{(p-1)}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 Q'L_p^{(p-1)}\\
&= ...\\
&= (-1)^p\int_0^1 \underbrace{Q^{(p)}}_{=0} L_p\\
&= 0
\end{aligned}$$

   Ainsi, $L_p\in\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et en particulier la famille (L_p) est orthogonale.

   On a $L_1=1-2X$ et $||L_1||^2=\int_0^1(1-2x)^2dx=\frac{1}{3}$. Cette famille n'est donc pas orthonormée.
4.
   - $M=((X^i|X^j))_{0\le i,j\le n}$: selon la question 2, elle est donc symétrique définie positive.
   - Soit P la matrice de passage de la base $(1,X,...,X^n)$ à la base $(L_0,...,L_n)$.

     On a $P^TMP=\underbrace{((L_i|L_j))_{0\le i,j\le n}}_{B}$.

- On a donc $(\det P)^2\det M=\det((L_i|L_j)_{0\le i,j\le n}$. Or,

$$\det((L_i|L_j)_{0\le i,j\le n} = \prod_{i=0}^n ||L_i||^2$$

car la famille $(L_0, ..., L_n)$ est orthonormée (et la matrice est donc diagonale), et P étant triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux égaux aux coefficients dominants des L_i : $-\dfrac{(2i)!}{i!}$.

Finalement

$$\det M = \frac{\prod_{i=0}^{n} ||L_i||^2}{\left(\prod_{i=0}^{n} \frac{(2i)!}{i!}\right)^2}$$

Enfin, par intégrations par parties successives,

$$(L_i|L_i) = |K_i^{(i)} K_i^{(i+1)}]_0^1 - \int_0^1 K_i^{(i-1)} K_i^{(i+1)} = ... = (-1)^i \int_0^1 K_i \underbrace{K_i^{2i)}}_{(-1)^i (2i)!} = (2i)! \int_0^1 K_i$$

et à nouveau par intégrations par parties successives,

$$\int_0^1 x^i (1-x)^i dx = \frac{i!^2}{(2i+1)!}$$

Finalement,

$$||L_i||^2 = \frac{i!^2}{2i+1}$$

et

$$\det M = \prod_{i=0}^{n} \frac{i!^4}{(2i)!^2 (2i+1)} = \prod_{i=0}^{n} \frac{i!^4}{(2i)!(2i+1)!}$$

5.14 1236-Centrale-MP

On considère la relation binaire pour $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ $A \preceq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. **Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.**
2. **Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée pour $\preceq$.**
3. **Montrer que toute suite croissante majorée pour $\preceq$ converge.**
4. **Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \preceq B \Longrightarrow B^{-1} \preceq A^{-1}$.**

1. Notons que si A et B sont symétriques, alors $B - A$ est symétrique.
   - Réflexivité : OK
   - Transitivité : soit $(A, B, C) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^3$. On suppose $A \preceq B$ et $B \preceq C$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $X^T(C-A)X = \underbrace{X^T(C-B)X}_{\geq 0} + \underbrace{X^T(B-A)X}_{\geq 0} \geq 0$ donc $C - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   - Antisymétrie : soit $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $A \preceq B$ et $B \preceq A$. Alors, $\mathrm{Sp}(B-A) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sp}(A-B) \subset \mathbb{R}^+$. Finalement, $\mathrm{Sp}(B-A) = \{0\}$. Comme $B - A$ est diagonalisable (car symétrique), on a $B - A = 0$ i.e. $A = B$.
2. - Pour commencer, on munit par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme triple associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Alors, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
   $$|||A||| = \max\{|r|, r \in \mathrm{Sp}(A)\}$$
   En effet, notons R ce max, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A, λ_1,...,λ_n les valeurs propres associées. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$ donc $||Ax||^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i^2}_{\leq R^2} x_i^2 \leq R^2 ||x||^2$.
   On a donc obtenu $|||A||| \leq R$. De plus, soit k tel que $|\lambda_k| = R$, on a $Ae_k = \lambda_k e_k$ donc $||Ae_k|| = R||e_k||$ et ainsi, $|||A||| \geq R$.
   - On suppose maintenant que Γ est une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui est bornée. Soit K tel que pour tout $A \in \Gamma$, $|||A||| \leq K$. Posons $P = KI_n$ et montrons que pour tout $A \in \Gamma$, $-P \preceq A \preceq P$. Soit $A \in \Gamma$, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de A et λ_1,...,λ_n les valeurs propres associées. Alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $(P - A)e_i = (R - \lambda_i)e_i$. Ainsi, $(e_1, ..., e_n)$ est une base de vecteurs propres de $P - A$ et $\mathrm{Sp}(P - A) = \{R - \lambda_i, i \in [\![1, n]\!]\} \subset \mathbb{R}^+$. On a donc bien $P - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On montre de même que $A + P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a donc bien montré que Γ est une partie majorée et minorée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   - On suppose ici que Γ est une partie minorée et majorée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: il existe M et P deux matrices symétriques telles que pour tout $A \in \Gamma$, $M \preceq A \preceq P$. Soit $\rho = \max\{|||P|||, |||M|||\}$. D'après ce qu'on a fait avant, on a $P \preceq \rho I_n$ et $-\rho I_n \preceq M$ donc $-\rho I_n \preceq A \preceq \rho I_n$. En raisonnant toujours comme dans l'implication précédente, on obtient que $\mathrm{Sp}(A) \subset [-\rho, \rho]$ et ainsi, $|||A||| \leq \rho$. Finalement, Γ est bornée.

3. • On commence par rappeler que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé. En effet, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé car c'est le noyau de l'application linéaire (continue) $M \mapsto M - M^T$. De plus, soit (B_m) une suite de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers B. On a déjà $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a, pour tout m, $X^T B_m X \geq 0$ et lorsque $m \to +\infty$, on a $X^T B_m X \to X^T B X$ (les applications : $X \mapsto CX$ et $X \mapsto X^T C$ sont continues). Ainsi, $X^T B X \geq 0$ et finalement, $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   • Soit (A_m) une suite croissante et majorée. D'après la question précédente, c'est donc une suite bornée, comme on est en dimension finie, elle admet une valeur d'adhérence L et, de plus, pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer que L est l'unique valeur d'adhérence.

     Soit L' une valeur d'adhérence de (A_m), soit ϕ extractrice telle que $A_{\phi(m)} \to L$ et ψ extractrice telle que $A_{\psi(m)} \to L'$.

     Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $p \geq \phi(m)$, alors $\psi(p) \geq \phi(m)$ donc $A_{\phi(m)} \preceq A_{\psi(p)}$. Ainsi, pour tout $p \geq \phi(m)$, $A_{\psi(p)} - A_{\phi(m)} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Or, $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé et lorsque $p \to +\infty$, $A_{\psi(p)} - A_{\phi(m)} \to L' - A_{\phi(m)}$, donc $L' - A_{\phi(m)} \in S_n^+(\mathbb{R})$.

     Cela est en fait valable pour tout m, on peut maintenant faire $m \to +\infty$, et on obtient de la même façon, $L' - L \in S_n^+(\mathbb{R})$.

     Finalement, $L \preceq L'$. De même, $L' \preceq L$ donc finalement, $L = L'$.
4. • Commençons par traiter le cas où $B = I_n$: on suppose qu'on a $A \preceq I_n$. En faisant comme dans la question 2, on obtient $\mathrm{Sp}(A) \subset]-\infty, 1]$. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a même $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, 1]$.

     Puis, $\mathrm{Sp}(A^{-1}) \in\subset [1, +\infty[$ et donc, toujours selon le raisonnement de 2, $I_n \preceq A^{-1}$.
   • Cas général : soit P matrice orthogonale et $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$ à diagonale strictement positive telle que $B = PDP^T$. Soit $C = P\mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})P^T$. Alors $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $C^2 = B$.

     On a

$$
\begin{array}{rcl}
A \preceq C^2 & \Leftrightarrow & \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T(C^2 - A)X \geq 0 \\
& \Leftrightarrow & \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (C^{-1}X)^T(C^2 - A)(C^{-1}X) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow & \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T(\underbrace{(C^{-1})^T C^2 C^{-1}}_{I_n} - (C^{-1})^T A C^{-1})X \geq 0 \\
& \Leftrightarrow & C^{-1}AC^{-1} \preceq I_n \\
& \Leftrightarrow & I_n \preceq CA^{-1}C \\
& \Leftrightarrow & \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T(CA^{-1}C - I_n)X \geq 0 \\
& \Leftrightarrow & \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (CX)^T\left(A^{-1} - C^{-1}C^{-1}\right)(CX) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow & \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T(A^{-1} - B^{-1})X \geq 0 \\
& \Leftrightarrow & B^{-1} \preceq A^{-1}
\end{array}
$$

5.15 1241-Centrale-MP

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé. Pour $A \subset E$ non vide et $x \in E$, on note $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$.

1. **On suppose A fermé. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.**
2. **Soient $F \subsetneqq E$ un sous-espace vectoriel fermé de E et $\delta \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire vérifiant $d(x, F) \geqslant \delta$.**
3. **On suppose E de dimension infinie et on admet que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermés. Montrer que la sphère unité n'est pas un compact de E.**

1. • Supposons que $x \in A$. Alors, $0 \in \{||x - a||, a \in A\}$ donc $d(x, A) = 0$.
   • Supposons que $d(x, A) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*0$: il existe $a_n \in A$ tel que $||x - a_n|| \leq \dfrac{1}{n}$. Alors, (a_n) est une suite de A qui converge vers x. Comme A est fermé, on a $x \in A$.
2. Soit $v \in E \setminus F$. Soit $d = d(v, F)$. D'après ce qui précède, on a $d > 0$. De plus $\dfrac{d}{\delta} > d$ donc il existe $f \in F$ tel que $||v - f|| \leq \dfrac{d}{\delta}$.

   Posons alors $x = \dfrac{v - f}{||v - f||}$. Soit $f' \in F$.

   On a

$$
\begin{array}{rcl}
||x - f'|| & = & \dfrac{||v - f - ||v - f||f'||}{||v - f||} \\
& \geq & \dfrac{||v - f - ||v - f||f'||}{d/\delta} \\
& \geq & \dfrac{\delta}{d}||v \underbrace{- f - ||v - f||f'}_{\in F}|| \\
& \geq & \dfrac{\delta}{d} d \\
& \geq & \delta
\end{array}
$$

Ainsi, $d(x,F) \geq \delta$.

3. On note $S(0,1)$ la sphère unité. Soit $x_0 \in S(0,1)$. $\text{Vect}(x_0)$ est un sev fermé de E. D'après la question 2, il existe $x_1 \in S(0,1) \setminus \text{Vect}(x_0)$ tel que
$$d(x_1, \text{Vect}(x_0)) \geq \frac{1}{2}$$
De même, $\text{Vect}(x_0, x_1)$ est un sev fermé de E. Il existe donc $x_2 \in S(0,1) \setminus \text{Vect}(x_0, x_1)$ tel que
$$d(x_2, \text{Vect}(x_0, x_1)) \geq \frac{1}{2}$$
... Supposons ainsi avoir construit x_0,..., x_n n vecteurs unitaires tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$d(x_k, \text{Vect}(x_0, ..., x_{k-1})) \geq \frac{1}{2}$$
Alors, $\text{Vect}(x_0, ..., x_n)$ est un sev de dimension finie de E donc fermé et différent de E. Il existe donc $x_{n+1} \in S(0,1) \setminus \text{Vect}(x_0, ..., x_n)$ tel que
$$d(x_{n+1}, \text{Vect}(x_0, ..., x_n)) \geq \frac{1}{2}$$
On a ainsi construit une suite de $S(0,1)$ qui vérifie :
$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, k \neq \ell \Rightarrow ||x_k - x_\ell|| \geq \frac{1}{2}$$
On ne peut donc pas extraire de (x_k) une sous-suite convergente. $S(0,1)$ n'est pas compacte.

5.16 1242-Centrale-MP

Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = -t\ln(t)$ pour $t \in]0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose S_n l'ensemble des vecteurs $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $p_1 + \dots + p_n = 1$ et $p_i \geqslant 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On pose enfin $H_n(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i)$ pour $p \in S_n$.

1.(a) Donner la définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et en donner une caractérisation en dimension finie.

(b) Montrer que S_n est une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$.

2.(a) Montrer que H_n est continue.

(b) Montrer que H_n atteint sur S_n un maximum en un unique point p_0, et expliciter p_0.

3. Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $f_v(p) = H_n(p) + \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$ pour $p \in S_n$.

On pose $f_v^* = \sup_{p \in S_n} f_v(p)$ et $E_v = \{p \in S_n, f_v(p) = f_v^*\}$.

Montrer que E_v est non vide. Déterminer f_v^* et E_v.

1. (a)

   (b)
   - S_n est fermée : on a $S_n = g^{-1}(\{1\})$ où $g : (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto p_1 + p_2 + ... + p_n$ est continue.
   - S_n est bornée : choisissons de travailler avec $||.||_1$. On a pour tout $p \in S_n$, $||p||_1 = 1$ donc S_n est bornée. Par caractérisation des compacts en dimension finie, S_n est compact.
   - S_n est convexe : soit $p = (p_1, ..., p_n) \in S_n$ et $q = (q_1, ..., q_n) \in S_n$, soit $\lambda \in [0,1]$. On s'intéresse à $\lambda p + (1-\lambda)q$ donc la i-ième composante est $\lambda p_i + (1-\lambda)q_i$.

     On a : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda p_i + (1-\lambda)q_i) \geq 0$ et de plus, $\sum_{i=1}^{n}(\lambda p_i + (1-\lambda)q_i) = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} + (1-\lambda) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i}_{=1} = 1$

     donc $\lambda p + (1-\lambda)q \in S_n$.

2. (a) φ est continue (puisque $t \ln t \to 0$ lorsque $t \to 0$), pour $i \in [\![1, n]\!]$, $p \in S_n \mapsto p_i$ est continue et donc $p \mapsto \varphi(p_i)$ est continue. Par somme, H_n est continue.

   (b)
   - H_n est continue et S_n est compact : par théorème, H_n admet un maximum global en un certain $p \in S_n$.

- Supposons que H_n atteigne son maximum en deux points $p=(p_1,...,p_n)$ et $p'=(p'_1,...,p'_n)$.
  φ est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $t\in]0,1[$, $\varphi'(t)=-1-\ln t$ qui est strictement décroissant. Ainsi, φ est strictement concave et si $\lambda\in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} H_n(\lambda p+(1-\lambda)p') &= \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda p_i+(1-\lambda)p'_i) \\ &> \sum_{i=1}^n \lambda\varphi(p_i)+(1-\lambda)\varphi(p'_i) \\ &> \lambda H_n(p)+(1-\lambda)H_n(p') \\ &> H_n(p) \end{aligned}$$

  ce qui est impossible ! On a prouvé l'unicité de l'élément $p\in S_n$ en lequel H_n est maximale.
- On a $H_n(p)=H_n(p_2,p_3,...,p_n,p_1)$ donc selon l'unicité montrée précédemment, on a $p_1=p_2=...=p_n$. Comme $p\in S_n$, on a finalement, $p=(1/n,...,1/n)$.

3. Le raisonnement de la question 2 s'adapte : on montre que f_v admet un unique maximum en un certain p_v de S_n.

On va commencer par utiliser le théorème d'optimisation sous contrainte afin de déterminer les éventuels extrema de f_v sur $\Gamma=\{(p_1,...,p_n)\in\mathbb{R}^n,\forall i\in[\![1,n]\!],p_i>0 \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i=1\}$.

Pour cela, on considère f'_v définie sur $(\mathbb{R}^*)^n$ (qui est un ouvert) par

$$f'_v(p_1,...,p_n)=\sum_{i=1}^n -p_i\ln p_i+\sum_{i=1}^n p_iv_i$$

et on considère g définie aussi sur $(\mathbb{R}^*)^n$ par

$$g(p_1,...,p_n)=\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)-1$$

Soit $X=g^{-1}(\{0\})$.

On recherche les éventuels extrema de la restriction de f'_v à X.

On vérifie les hypothèses du théorème :

- f'_v et g sont de classe $\mathcal{C}^1$
- la différentielle de g ne s'annule pas sur X (on a pour $x\in X$, $\mathrm{grad}g(x)=(1,...,1)$)

donc, par théorème, si la restriction à X f'_v admet en $(a_1,...,a_n)$ un extremum local, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{grad}f'_v(a)=\lambda\mathrm{grad}(g)(a)$.

Or,

$$\mathrm{grad}f'_v(a)=(-\ln a_1-1+v_1,...,-\ln a_n-1+v_n)$$

et on en déduit donc qu'on a

$$-\ln a_1-1+v_1=-\ln a_2-1+v_2=...=-\ln a_n-1+v_n$$

Notons A cette valeur commune, on a donc pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$a_i=e^{-A-1+v_i}$$

ie en notant $K=e^{-A-1}$:

$$a_i=Ke^{v_i}$$

Comme $a_1+...+a_n=1$, on a nécessairement, $K=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^n e^{v_i}}$.

De plus,

$$\begin{aligned} f_v(Ke^{v_1},...,Ke^{v_n}) &= -\sum_{i=1}^n Ke^{v_i}\ln(Ke^{v_i})+\sum_{i=1}^n p_iv_ie^{v_i} \\ &= -\sum_{i=1}^n K\ln Ke^{v_i} \\ &= -\ln K \\ &= \ln\left(\sum_{i=1}^n e^{v_i}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, si $p_v \in \Gamma$, on a $p_v = (Ke^{v_1}, ..., Ke^{v_n})$ et $f_v(p_v) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{v_i}\right)$.

Si $p_v \notin \Gamma$: soit $I = \{i \in [\![1,n]\!], p_i \neq 0\}$. D'après l'étude précédente, on a $f_v(p_v) = \ln\left(\sum_{i\in I} e^{v_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{v_i}\right)$

Ainsi, le maximum de f_v est atteint en $(Ke^{v_1}, ..., Ke^{v_n})$:

$$f_v^* = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{v_i}\right) \text{ et } E_v = \{(Ke^{v_1}, ..., Ke^{v_n}\}$$

5.17 1243-Centrale-MP

Soient $(E, \|\|), (E', \|\|)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A un fermé non vide de E, B une partie non vide de E'. Soit $f : A \to B$ continue bijective telle que l'image réciproque par f de toute partie bornée de B est bornée. Montrer que f^{-1} est continue.

On montre la continuité de f^{-1} par caractérisation séquentielle.

Soit (y_n) une suite de B qui converge vers $y \in B$. Montrons que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$.

(y_n) est bornée car convergente donc, selon l'hypothèse, $(f^{-1}(y_n))$ est bornée. Comme on est en dimension finie, pour montrer que $(f^{-1}(y_n))$ converge vers $f^{-1}(y)$, il suffit de montrer que $f^{-1}(y)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(f^{-1}(y_n))$.

Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $(f^{-1}(y_n))$: il existe une extractrice ϕ telle que $f^{-1}(y_{\phi(n)}) \to \ell$. Comme f est continue, on a $y_{\phi(n)} \to f(\ell)$. Or, $y_{\phi(n)} \to y$ donc, par unicité de la limite, $y = f(\ell)$ i.e. $\ell = f^{-1}(y)$.

Ainsi, $f^{-1}(y)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(f^{-1}(y_n))$: c'est bien ce qu'on voulait montrer.

5.18 1244-Centrale-MP

Un espace normé réel est dit séparable lorsqu'il contient une partie dénombrable dense.

1. **L'espace $\mathbb{R}$ est-il séparable ?**
2. **Montrer qu'un espace normé de dimension finie est séparable.**
3. **Soit E un espace préhilbertien réel de dimension infinie. Montrer que E est séparable si et seulement s'il existe une suite orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 0}$ telle que Vect $(e_n)_{n\geqslant 0}$ soit dense dans E.**

1. Oui car $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On considère $\Gamma = \{\sum_{i=1}^{n} q_i e_i, \forall i \in [\![1,n]\!], q_i \in \mathbb{Q}\}$. Cet ensemble est dénombrable car en bijection avec $\mathbb{Q}^n$ qui est dénombrable. Montrons que Γ est dense dans $\mathbb{R}$.

   Toutes les normes étant équivalentes (on est en dimension finie), on choisit de travailler avec $||.||_\infty$) (deux normes équivalentes ont les mêmes ensembles denses).

   Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. On décompose x dans la base $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $q_i \in \mathbb{Q}$ tel que $|x_i - q_i| \leq \varepsilon$.

   On a alors $||x - \sum_{i=1}^{n} q_i e_i||_\infty \leq \varepsilon$.
3.
   - On suppose que E est séparable. Soit A une partie de E dénombrable. Soit $\phi : \mathbb{N} \to A$ bijective. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a pose $x_n = \phi(n)$. On s'inspire de l'algorithme de Gram-Schmidt.
     - Si $x_0 \neq 0_E$, on pose $e_0 = \dfrac{x_0}{||x_0||}$ et sinon, on pose $e_0 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$.
     - Supposons avoir construit $e_0, e_1, ..., e_n$. Soit $k = \min\{j, x_j \notin \text{Vect}(e_0, ..., e_n)\}$. On pose alors $e_k = \dfrac{x_k - \sum_{j=0}^{n}(x_k|e_j)e_j}{||x_k - \sum_{j=0}^{n}(x_k|e_j)e_j|}$
     - On a ainsi construit une suite orthonormée (e_n). Montrons que $\text{Vect}((e_n)_n)$ est dense dans E. Or, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in \text{Vect}(e_0, ..., e_m) \subset \text{Vect}((e_n)_n)$ donc $A \subset \text{Vect}((e_n)_n)$. Comme $\overline{A} = E$, on a aussi $\overline{\text{Vect}((e_n)_n)} = E$
   - Supposons qu'il existe une suite orthonormée (e_n) telle que $\text{Vect}((e_n)_n)$ est dense dans E. On pose $A = \{\sum_{i=0}^{n} q_i e_i, n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!], q_i \in \mathbb{Q}\}$. Montrons que A est une partie dénombrable et dense de E.

- A dénombrable : on a
$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \sum_{i=0}^{n} q_i e_i, \forall i \in [\![0,n]\!], q_i \in \mathbb{Q} \right\}}_{A_n}$$
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n est dénombrable car en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$ et A est donc dénombrable puisque c'est une union dénombrable d'ensembles dénombrables.
- A dense dans E : soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in \mathrm{Vect}((e_n)_n)$ tel que $||x - a|| \leq \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$.

  Pour $i \in [\![0,n]\!]$, il existe $q_i \in \mathbb{Q}$ tel que $|\lambda_i - q_i| \leq \dfrac{\varepsilon}{n+1}$. Notons $b = \sum_{i=0}^{n} q_i e_i$.

  Comme la famille $(e_n)_n$ est orthonormée, on a $||a-b||^2 = \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i - q_i|^2 \leq \varepsilon^2$.

  Ainsi, $||b - x|| \leq ||b-a|| + ||a-x|| \leq 2\varepsilon$ et $b \in A$.

5.19 1245-Centrale-MP

Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on note $\varphi(f)$ la primitive de f d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0,1]$.

1. **Justifier la définition de φ puis établir qu'il s'agit d'une application linéaire sur E. On munit E de la norme $\|\|_\infty$ sur $[0,1]$.**

   On note $\|\varphi\|_{\mathbf{op}} = \sup \left\{ \dfrac{\|\varphi(f)\|_{\infty,[0,1]}}{\|f\|_{\infty,[0,1]}}, f \in E \setminus \{0_E\} \right\}$.
2. **Montrer que $\|\varphi\|_{\mathbf{op}}$ est correctement définie et en trouver un majorant.**
3. **Soient $f \in E$ et G la primitive de $F = \varphi(f)$ nulle en 0 . Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,**
$$G(x) = xF(x) - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = (x-1)F(x) - \int_x^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t.$$
4. **Déterminer la norme $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$.**

1. - Soit $f \in E$. f est continue et admet donc une primitive H. Les primitives de f sont les $H + A$ avec $A \in \mathbb{R}$.
     On a $\int_0^1 (H(t) + A)dt = 0$ ssi $A = -\int_0^1 H(t)dt$.
     Ainsi, il existe un unique A tel que $H + A$ soit une primitive de f d'intégrale nulle sur $[0,1]$.
     On a de plus $\phi(f) = H - \int_0^1 H$.
   - Montrons que φ est linéaire. Soit $(f,g) \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\varphi(f) + \varphi(g)$ est une primitive de $\lambda f + g$ et $\int_0^1 \lambda\varphi(f) + \varphi(g) = \lambda \int_0^1 \varphi(f) + \int_0^\varphi (g) = 0$.
     On a donc bien $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.

2. Soit $f \in E \setminus \{0_E\}$. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x f(t)dt$. On a $\phi(f) = F + C$ avec $C = -\int_0^1 G$.

   Or, si $x \in [0,1]$, $|G(x)| \leq \int_0^x ||f||_{\infty,[0,1]} \leq ||f||_{\infty,[0,1]}$ et d'autre part, $|C| \leq ||G||_{\infty,[0,1]}$ et donc $|C| \leq ||f||_{\infty,[0,1]}$.
   Finalement, $\varphi(f)$ est bornée sur $[0,1]$ (ce qu'on savait déjà...) et $||\varphi(f)||_{\infty,[0,1]} \leq 2||f||_{\infty,[0,1]}$.
   Ainsi, $\left\{ \dfrac{\|\varphi(f)\|_{\infty,[0,1]}}{\|f\|_{\infty,[0,1]}}, f \in E \setminus \{0_E\} \right\}$ est majoré et sa borne sup est ≤ 2.
$$||\varphi||_{op} \leq 2$$

3. Soit $H : x > 0 \mapsto xF(x) - \int_0^x tf(t)dt$ et $K : x > 0 \mapsto (x-1)F(x) - \int_x^1 (1-t)f(t)dt$.

   - On a $H(0) = 0$ et H est dérivable avec pour $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = F(x) + xf(x) - xf(x)$. Ainsi, $H' = G'$ et $H(0) = G(0)$. On a donc $H = G$.

- On raisonne de même : on a

$$\begin{aligned}
K(0) &= -F(0) - \int_0^1 (1-t)f(t)dt \\
&= -F(0) - \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt \\
&= -F(0) - F(1) + F(0) + [tF(t)]_0^1 - \int_0^1 F(t)dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

  Et pour $x \in \mathbb{R}$, $K'(x) = (x-1)f(x) + F(x) + (1-x)f(x) = G'(x)$.
  On conclut de même qu'on a $G = K$.

4. Soit $f \in E$ et $F = \varphi(f)$. On a pour $(x,t) \in [0,1]^2$, $\int_t^x f(u)du = F(x) - F(t)$ et ainsi, $\int_0^1 \int_t^x f(u)dudt = \int_0^1 F(x)dt - \int_0^1 F(t)dt$. Finalement,

$$F(x) = \int_0^1 \int_t^x f(u)dudt$$

Pour $x \in [0,1]$, on a donc

$$|F(x)| \leq \int_0^1 |x-t| ||f||_{\infty,[0,1]} dt$$

Or, $\int_0^1 |x-t|dt = \frac{1}{2}$ donc finalement,

$$||F||_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{2}||f||_{\infty,[0,1]}$$

Enfin, pour $f = 1$, on a $F(x) = x - \frac{1}{2}$ donc $||F||_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{2}||f||_{\infty,[0,1]}$.
Finalement,

$$||\varphi||_{op} = \frac{1}{2}$$

5.20 1246-Centrale-MP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f_A(x) = (A + xI_n)^{-1} A$ pour x réel convenable.

1. **Montrer que la fonction f_A est définie au voisinage épointé de 0 .**
2. **Étudier le comportement de la fonction f_A en 0 dans le cas où A est inversible, puis dans le cas où A est nilpotente.**
3. **Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Im}(u^p) \oplus \operatorname{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^n$.**
   En déduire l'existence de deux supplémentaires F et G dans $\mathbb{R}^n$, stables par u, tels que u induit sur F un automorphisme et induit sur G un endomorphisme nilpotent.
4. **Caractériser les matrices A pour lesquelles f_A a une limite en 0 .**

1. $x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n)$ est une fonction polynomiale de degré n qui s'annule donc au plus n fois. Soit $r = \min\{|x|, \det(A + xI_n) = 0 \text{ et } x \neq 0\}$. Alors, sur $]-r, r[\setminus\{0\}$, on a $\det(A + xI_n) \neq 0$ et donc $f_A(x)$ bien définie.
2. - Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors, f_A est définie sur $]-r, r[$ et est continue : en effet
     - $x \in]-r, r[\mapsto A + xI_n \in GL_n(\mathbb{R})$ est continue
     - $B \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto B^{-1}$ est continue : $B \mapsto \text{com}(B)$ est continue, $B \mapsto B^T$ aussi et $B \mapsto \det B$ aussi et finalement, $B \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{\det B}(\text{com}(B))^T$ est continue
     - $B \mapsto BA$ est continue.
       Ainsi, $\lim_{x \to 0} f_A(x) = f_A(0) = A^{-1}A = I_n$.
   - Si A est nulle, f_A tend vers 0 en 0.
   - Si A est nilpotente : soit p son nilindice, on a $p \geq 2$. On a pour $x \in]-r, r[\setminus\{0\}$, $(A + xI_n)(I_n - \frac{1}{x}A + \frac{1}{x^2}A^2 + ... + (-1)^{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}A^{p-1}) = xI_n$ ainsi, $(A + xI_n)^{-1} = \frac{1}{x}\left(I_n - \frac{1}{x}A + ... + (-1)^{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}A^{p-1}\right)$ et donc

$$f_A(x) = \frac{1}{x}\left(A - \frac{1}{x}A^2 + ... + (-1)^{p-2}\frac{1}{x^{p-2}}A^{p-1}\right)$$

ie
$$f_A(x)=\frac{1}{x^{p-1}}\left(x^{p-2}A-x^{p-3}A^2+...+(-1)^{p-2}A^{p-1}\right)$$

Lorsque $x\to 0$, $x^{p-2}A-x^{p-3}A^2+...+(-1)^{p-2}A^{p-1}\to(-1)^{p-2}A^{p-1}\neq 0$ donc f_A n'a pas de limite en 0.

3. On sait que pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\ker u^m\subset\ker u^{m+1}$. La suite $\dim(\ker u^m)$ est une suite d'entiers croissante et majorée par n. Elle est donc stationnaire. Soit p un rang à partir duquel est elle constante. On a donc pour $m\geq p$, $\ker u^m=\ker u^p$.

   De même, pour $m\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{Im}(u^m)\supset\mathrm{Im}(u^{m+1})$ et, par théorème du rang, si $m\geq p$, on a $\dim\mathrm{Im}(u^m)=\dim\mathrm{Im}(u^p)$ et par l'inclusion précédente, $\mathrm{Im}(u^p)=\mathrm{Im}(u^m)$.

   Montrons qu'on a $\mathbb{R}^n=\ker u^p\oplus\mathrm{Im}u^p$.

   Par théorème du rang, on a déjà $\dim\mathbb{R}^n=\dim\ker u^p+\dim\mathrm{Im}\ u^p$.

   Soit $y\in\ker u^p\cap\mathrm{Im}\ u^p$ et soit $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $y=u^p(x)$.

   Alors $x\in\ker u^{2p}$ donc $x\in\ker u^p$ donc $y=0$.

   Finalement, on a bien $\mathbb{R}^n=\ker u^p\oplus\mathrm{Im}\ u^p$.

   Soit $F=\mathrm{Im}\ (u^p)$ et $G=\ker u^p$.

   On a $u(F)\subset F$ et $u(G)\subset G$.

   De plus, si $x\in\ker u^p$, on a $u^p(x)=0_E$ donc u_G est nilpotent.

   Et si $x\in\mathrm{Im}(u^p)$ est tel que $u(x)=0$, alors, en notant $x=u^p(a)$, on a $a\in\ker u^{p+1}$ donc $a\in\ker u^p$ et donc $x=0$. Cela montre que u_F est un automorphisme.

4. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible et non nulle. On note a l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé. On introduit p comme dans la question précédente, on note $F=\mathrm{Im}(a^p)$ et $G=\ker(a^p)$. Ils ne sont pas réduits à $\{0\}$. Et, de plus, $a(F)\subset F$, $a(G)\subset G$. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Alors $\mathcal{B}$ la concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et on a
$$M_{\mathcal{B}}(a)=\begin{pmatrix}M_{\mathcal{B}_F}(u_F)&0\\0&M_{\mathcal{B}_G}(u_G)\end{pmatrix}$$

   Notons $B=M_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ et $N=M_{\mathcal{B}_G}(u_G)$. D'après les formules de changement de base, il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A=P\underbrace{\begin{pmatrix}B&0\\0&N\end{pmatrix}}_{A'}P^{-1}$.

   Puis, pour $x\in]-r,r[\setminus\{0\}$, $f_A(x)=(PA'P^{-1}+xI_n)^{-1}PA'P^{-1}=Pf_{A'}(x)P^{-1}$.

   Or,
$$\begin{aligned}f_{A'}(x)&=\begin{pmatrix}B+xI_p&0\\0&N+xI_m\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}B&0\\0&N\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(B+xI_p)^{-1}&0\\0&(N+xI_m)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B&0\\0&N\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}f_B(x)&0\\0&f_N(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Si A n'est pas inversible, alors $\ker A\neq\{0\}$ donc $\ker A^p\neq\{0\}$ et donc N n'est pas de taille nulle. D'après ce qui précède, $f_{A'}$ n'a pas de limite en 0.

   Si A est inversible, alors, f_A a bien une limite en 0.

5.21 1247-Centrale-MP

Soient (a_n) une suite à termes réels positifs et (b_n) une suite à termes complexes. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge et que $b_n\sim a_n$. On note $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.

1. **Montrer que la série $\sum b_n$ diverge et que les sommes partielles des deux séries sont équivalentes.**
2. **On suppose qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\frac{S_n}{na_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda$. Déterminer la limite de $\frac{1}{n^2a_n}\sum_{k=0}^{n}ka_k$.**

1. C'est une question de cours. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geq N$, alors $|a_n-b_n|\leq\varepsilon a_n$.

Notons $A = |\sum_{k=0}^{N-1} a_k - b_k|$. Soit $n \geq N$. On a

$$\begin{aligned} |\sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)| &\leq A + |\sum_{k=N}^{n}(a_k - b_k)| \\ &\leq A + \sum_{k=N}^{n} |a_k - b_k| \\ &\leq A + \sum_{k=N}^{n} \varepsilon a_k \\ &\leq A + \varepsilon S_n \end{aligned}$$

Comme $S_n \to +\infty$, on a existence de $N' \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N'$, alors $\varepsilon S_n \geq A$.
Ainsi, pour $n \geq \max(N, N')$, on a $|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k| \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} a_k$.
Cela montre que $\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \sim S_n$$

Cela montre au passage que $\sum b_n$ diverge.

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^{n} k a_k &= \frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n^2 a_n} \left(\sum_{k=1}^{n} k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) S_k \right) \\ &= \frac{1}{n^2 a_n} \left(n S_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^{n} k a_k + \frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{S_n}{n a_n} \to \lambda$$

Or, $\frac{S_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n} \frac{S_n}{n a_n} \to 0$ donc

$$\frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=1}^{n} k a_k + \frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^{n} S_k \to \lambda$$

De plus, d'après la question 1, $\lambda \sum_{k=0}^{n} k a_k \sim \sum_{k=0}^{n} S_k$ donc

$$\frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=1}^{n} k a_k + \frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^{n} S_k \sim (\lambda + 1) \frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^{n} k a_k$$

Finalement,

$$\frac{1}{n^2 a_n} \sum_{k=0}^{n} k a_k \to \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

5.22 1248-Centrale-MP

1. **Rappeler la règle de d'Alembert pour une série numérique à termes positifs.**
2. **On considère une suite croissante $(q_n)_{n \geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 2$.**

   (a) **Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{q_1 \dots q_n}$?**

(b) Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire alors le réel $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \cdots q_n}$ appartient à $\mathbb{Q} \cap]0,1]$.

(c) On admet réciproquement que si (q_n) tend vers $+\infty$ alors $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les réels $e, \operatorname{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.

3. Montrer la réciproque admise ci-dessus.

1.

2. (a) Comme (q_n) est croissante, elle admet une limite ℓ. On a $\frac{\frac{1}{q_1 \dots q_{n+1}}}{\frac{1}{q_1 \dots q_n}} = \frac{1}{q_{n+1}}$.

- Si $\ell = +\infty$, alors $\frac{\frac{1}{q_1 \dots q_{n+1}}}{\frac{1}{q_1 \dots q_n}} \to 0$ donc le rayon de convergence est $+\infty$
- Sinon, $\frac{\frac{1}{q_1 \dots q_{n+1}}}{\frac{1}{q_1 \dots q_n}} \to \frac{1}{\ell}$ et le rayon de convergence est ℓ. Comme les q_n sont ≥ 2, on a $\ell \geq 2$. Ce qui justifie la bonne définition de la série de la question suivante.

(b) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geq N$, alors $q_n = a$. On a

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_1 \dots q_N} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{a^{n-N}} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{q_1 \dots q_n} + \frac{1}{q_1 \dots q_N} \frac{1}{1 - 1/a} \end{aligned}$$

ce qui est bien un rationnel positif.

Enfin, $x \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq 1$.

(c)
- $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. En posant $q_k = k$ et en admettant la réciproque de (b), on obtient $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \notin \mathbb{Q}$ donc $e \notin \mathbb{Q}$.
- On a $\operatorname{ch}(\sqrt{2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k)!}$ ie $\operatorname{ch}(\sqrt{2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! 1.3.5 \dots (2k-1)}$. En posant $q_k = k(2k-1)$ et en admettant la réciproque de (b), on obtient bien $\operatorname{ch}(\sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$.
- Si $e^{\sqrt{2}}$ était rationnel, alors $\frac{e^{\sqrt{2}+\frac{1}{e^{\sqrt{2}}}}}{2}$ serait rationnel ie $\operatorname{ch}(\sqrt{2})$ serait rationnel ce qui n'est pas le cas.

3. On suppose que $q_k \to +\infty$. En raisonnement par l'absurde, on montre que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \dots q_k} \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, on suppose donc que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \dots q_k} \in \mathbb{Q}$: on le note $\frac{p}{q}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a, en coupant la somme à N :

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{p_1 \dots p_k} + \frac{1}{p_1 \dots p_N} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{p_{N+1} \dots p_k}$$

On écrit $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{p_1 \dots p_k} = \frac{a_N}{p_1 \dots p_N}$ avec $a_N \in \mathbb{N}$ et ainsi

$$p p_1 \dots p_N = a_N q + q \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{p_{N+1} \dots p_k}}_{R_N} \quad (*)$$

Or, $R_N \to 0$ car : soit $\varepsilon \in]0, \dfrac{1}{2}[$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq M$, $q_n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. Cela donne pour $N+1 \geq M$:

$$0 \leq R_N \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \varepsilon^{k-N} \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 2\varepsilon.$$

Finalement, selon $(*)$, $(qR_N)_N$ est une suite d'entiers qui converge vers 0. Elle est donc nulle à partir d'un certain rang. Cela est absurde car pour tout N, $R_N > 0$.

5.23 1249-Centrale-MP

Soit $I =]-1, +\infty[$. On dit que $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ vérifie $(*)$ si et seulement si : $\forall x, y \in I, f(x)+f(y) = f(x+y+xy)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, x_n = \dfrac{1}{(n+2)(2n+1)}$ et $y_n = \dfrac{n}{n+1}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

1. **Simplifier $x_n+y_n+x_ny_n$. Montrer que la série de terme général $f(x_n)$ converge et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ en fonction de $f(1)$.**
2. **Montrer que f est dérivable.**
3. **Trouver toutes les fonctions continues vérifiant $(*)$.**

1. On obtient $x_n + y_n + x_n y_n = y_{n+1}$.
   D'après la relation vérifiée par f, on a donc $f(x_n) + f(y_n) = f(y_{n+1})$.
   On a donc pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} f(x_n) = \sum_{n=0}^{N} (f(y_{n+1}) - f(y_n)) = f(y_{N+1}) - f(0)$$

Or, en faisant $x = y = 0$ dans $(*)$, on obtient $f(0) = 0$. De plus, $y_{N+1} \to 1$, donc, par continuité de f, $f(y_{N+1}) \to f(1)$. Finalement, $\sum f(x_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) = f(1)$$

2. Fixons $x > -1$. Comme f est continue, on a

$$\int_0^1 f(x) + f(y)dy = \int_0^1 f(x+y+xy)dy$$

En posant $u = x + y + xy$ dans la seconde intégrale, il vient

$$f(x) + \int_0^1 f(y)dy = \frac{1}{1+x} \int_x^{2x+1} f(u)du$$

Or, $x > -1 \mapsto \displaystyle\int_x^{2x+1} f(u)du$ est dérivable et $x > -1 \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ l'est aussi, donc f est bien dérivable.

3. Si f est une fonction continue solution de $(*)$, elle est dérivable d'après la question précédente.
   Dans $(*)$, on fixe x et on dérive (y est la variable). Cela donne

$$f'(y) = (1+x)f'(x+y+xy)$$

De même, on fixe y et on dérive et on obtient

$$f'(x) = (1+y)f'(x+y+xy)$$

Ainsi, finalement

$$(1+x)f'(x) = (1+y)f'(y)$$

La fonction $t > -1 \mapsto (1+t)f'(t)$ est constante. Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > -1$,

$$f'(t) = \frac{A}{1+t}$$

Il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > -1$,

$$f(t) = A\ln(1+t) + B$$

Réciproquement, soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f : t > -1 \mapsto A\ln(1+t) + B$.
Soit $(x, y) \in I^2$. On a

$$f(x) + f(y) = A\ln(1+x) + A\ln(1+y) + 2B = A\ln(1+x+y+xy) + 2B$$

et

$$f(x+y+xy) = A\ln(1+x+y+xy) + B$$

Ainsi, f est solution ssi $B = 0$.
On conclut que l'ensemble solution est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\ln(1+t) \end{array}, A \in \mathbb{R} \right\}$$

5.24 1251-Centrale-MP (MPSI)

1. **Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que g est strictement monotone.**
   On cherche les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}, g \circ g(x) = 2g(x) - x$ $(*)$.
2. **Montrer qu'une telle fonction est bijective et strictement croissante.**
3. **Exprimer g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis conclure.**

1. Cours.
2. - f est injective : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose qu'on a $g(x) = g(y)$, alors $g \circ g(x) = g \circ g(y)$ et finalement, $x = y$ d'après $(*)$.
   - Comme g est continue, injective et définie sur un intervalle, elle est strictement monotone. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite ℓ en $+\infty$. Si ℓ est fini, alors en faisant $x \to +\infty$ dans $(*)$ et en utilisant la continuité de g, on obtient $g(\ell) = -\infty$ ce qui n'est pas possible. Si $\ell = -\infty$, alors g est décroissante et on obtient alors par $(*)$, $\lim_{-\infty} g = -\infty$ ce qui n'est pas possible. Finalement, on a

   $$\lim_{+\infty} g = +\infty$$

     de même,

   $$\lim_{-\infty} g = -\infty$$

   cela montre que g est croissante et par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient que g est surjective.
3. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $g^3(x) = g^2(g(x)) = 2g(g(x)) - g(x) = 4g(x) - 2x - g(x) = 3g(x) - 2x$.
   Puis, par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

   $$g^n(x) = ng(x) - (n-1)x$$

   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$g^n(0) = ng(0)$$

et ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$g(x) - g(0) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)x = \frac{g^n(x) - g^n(0)}{n}$$

Or, g^n est croissante, donc, si de plus $x \geq 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g(x) - g(0) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)x \geq 0$$

et donc, en faisant $n \to +\infty$,

$$g(x) \geq g(0) + x \quad (1)$$

Or, en évaluant $(*)$ en $g^{-2}(x)$, on obtient

$$x = 2g^{-1}(x) - g^{-2}(x)$$

Ainsi, g^{-1} vérifie aussi $(*)$. On a donc aussi pour $x \geq 0$

$$g^{-1}(x) \geq g^{-1}(0) + x$$

Or, selon $(*)$ évaluée en $g^{-1}(x)$, $g(x) = 2x - g^{-1}(x)$ donc

$$2x - g(x) \geq -g(0) + x$$

soit

$$g(x) \leq x + g(0) \quad (2)$$

De (1) et (2), on a, pour $x \geq 0$, $g(x) = g(0) + x$.
On procède de même pour $x \leq 0$.
Finalement, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g : x \mapsto x + A$.
Réciproquement, on vérifie que ces fonctions conviennent.

5.25 1254-Centrale-MP

1. **Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.**
2. **Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Exprimer P'/P à l'aide des racines de P.**
3. **Soit $r > 0$. On suppose que P ne s'annule pas sur le cercle $C(0,r)$ du plan complexe. On pose $N_r(P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{P'\left(re^{it}\right)}{P\left(re^{it}\right)} re^{it}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $N_r(P)$ est égal au nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) dans le disque $D(0,r)$.**

1. C'est du cours.
2. C'est aussi du cours. Si P est non constant, si on note $\{a_1, ..., a_k\}$ les racines distinctes de P, $\{m_1, ..., m_k\}$ leurs multiplicités respectives, on a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{m_\ell}{X - a_\ell}$$

3. En gardant les mêmes notations, on a

$$N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^{k} m_\ell \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - a_\ell} dt$$

Il s'agit donc de calculer

$$I_\ell = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - a_\ell} dt$$

Remarquons pour commencer que si $p \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipt}dt = 0$ et si $p = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipt}dt = 2\pi$.

- Si $|a_\ell| < r$.
  On a

$$\begin{aligned} \frac{re^{it}}{re^{it} - a_\ell} &= \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{a_\ell}{r}e^{-it}}_{|.|<1}} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_\ell^p}{r^p} e^{-ipt} \end{aligned}$$

On note $f_p(t) = \dfrac{a_\ell^p}{r^p} e^{-ipt}$ et on applique un théorème d'interversion $\sum$ et $\int$: :

- $\sum f_p$ CVN vers $f : t \mapsto \dfrac{re^{it}}{re^{it} - a_\ell}$ sur $[0, 2\pi]$: en effet, $||f_p||_{\infty,[0,2\pi]} = \dfrac{|a_\ell|^p}{r^p}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente
- les f_p sont continues

On a donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t)dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_p(t)dt$ c'est-à-dire

$$I_\ell = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_\ell^p}{r^p} \int_0^{2\pi} e^{-ipt}dt = 2\pi$$

- Si $|a_\ell| > r$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{re^{it}}{re^{it}-a_\ell} &= \frac{1}{a_\ell}\frac{re^{it}}{\frac{r}{a_\ell}e^{it}-1} \\
&= \frac{re^{it}}{a_\ell}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{r^p}{a_\ell^p}e^{ipt} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{r^p}{a_\ell^p}e^{ipt}
\end{aligned}$$

On note $f_p(t) = \dfrac{r^p}{a_\ell^p}e^{ipt}$ et on applique un théorème d'interversion $\sum$ et $\int$: :

- $\sum f_p$ CVN vers $f : t \mapsto \dfrac{re^{it}}{re^{it}-a_\ell}$ sur $[0, 2\pi]$: en effet, $||f_p||_{\infty,[0,2\pi]} = \dfrac{r^p}{|a_\ell|^p}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente
- les f_p sont continues

On a donc $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} f_p(t)dt = \sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_p(t)dt$ c'est-à-dire

$$I_\ell = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{r^p}{a_\ell^p}\int_0^{2\pi} e^{-ipt}dt = 0$$

Finalement, $N_r(P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} m_\ell I_\ell$ avec I_ℓ qui vaut 0 si $|a_\ell| > r$ et 2π sinon. $N_r(P)$ est donc bien égale au nombre de racines de P, comptées avec multiplicité, qui sont de module $< r$.

5.26 Exercice 1273

1. **Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Rappeler la définition de la différentielle $\mathrm{d}\,f(a)$ de f en $a \in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.**
2. **On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.**
   Montrer que $\nabla(\det)(A) = \mathrm{Com}(A)$.
3. **Quel est le coefficient de X dans χ_A ?**
4. **Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.**

1.
2. La structure canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donnée par $(A|B) = \mathrm{tr}(A^TB)$. La base canonique : $(E_{i,j})_{i,j}$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

   On s'intéresse à l'existence puis à la continuité des dérivées partielles de det. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
det(A+tE_{i,j}) &= \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j}+t & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & 0 & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & t & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix} \\
&= \det A + t(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\partial_{i,j}\det(A)$ existe et vaut $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

De plus, $A\mapsto\Delta_{i,j}$ est continue car polynomiale en les coefficients de A donc $\partial_{i,j}$ est continue.

Finalement, det est de classe $\mathcal{C}^1$ donc différentiable et pour $(A,H)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$d\det(A)(H)=\sum_{1\leq i,j\leq n}h_{i,j}(1-)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

ie

$$d\det(A)(H)=(\mathrm{com}(A)|H)$$

3. Notons $\chi_A=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. On a donc $\chi_A(t)(t)=a_0+a_1t+o(t)$. D'autre part, $\chi_A(t)=\det(tI_n-A)=(-1)^n\det(A-tI_n)=(-1)^n\det A+(-1)^n d\det(A)(-tI_n)+o(t)$.

   Ainsi,
$$\begin{aligned}a_1&=(-1)^{n+1}d\det(A)(I_n)\\&=(1-)^{n+1}\mathrm{tr}(\mathrm{com}(A))\end{aligned}$$

4. Soit $g:M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\det M-1$. On a $SL_n(\mathbb{R})=g^{-1}(\{0\})$. Et, $dg(I_n)=d\det(I_n)=\mathrm{tr}$ qui n'est pas l'application nulle.

   d'après le cours, $T_{I_n}(SL_n(\mathbb{R}))=\ker dg(I_n)$: c'est l'ensemble des matrices de trace nulle.

5.27 Exercice 1274

Soient $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),b\in\mathbb{R}^n$ et $J:x\mapsto\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle b,x\rangle$.

1. **Montrer que J est strictement convexe.**
2. **Montrer que $J(x)\to+\infty$ quand $\|x\|\to+\infty$.**
3. **En déduire que J admet un minimum.**
4. **Calculer ∇J et conclure quant au minimum de J.**

1. $x\mapsto\langle b,x\rangle$ est convexe. On montre la stricte convexité de $f:x\mapsto\langle Ax,x\rangle$. De plus si $\lambda\in[0,1]$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, en développant, on obtient,
$$(\lambda a+(1-\lambda)b)^2\leq\lambda a^2+(1-\lambda)b^2$$
avec égalité ssi $a=b$. Soit $(e_1,...,e_n)$ une BON de vecteurs propres de A et λ_1,...,λ_n les valeurs propres (strictement positives) associées. Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$ et $\lambda\in[0,1]$. On note x_1,...,x_n, y_1,...,y_n les coordonnées de x et y dans a base $(e_1,...,e_n)$. a $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\lambda x_i+(1-\lambda)y_i)^2\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i^2+(1-\lambda)y_i^2\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.
De plus, si $x\neq y$, alors on a existence de i tel que $x_i\neq y_i$ et l'inégalité précédente est alors une inégalité stricte.
2. On a $J(x)\geq\frac{||x||^2}{2}\underbrace{\min_{1\leq i\leq n}\lambda_i}_{>0}-||b||.||x||$ d'où la limite.
3. Soit $a=J(0)+1$. Il existe $R>0$ tel que pour tout x tel que $||x||>R$, $J(x)\geq a$.

   $B_f(0,R)$ est compact et J est continue donc il existe $x_0\in B_f(0,R)$ tel que $J(x_0)=\min_{B_f(0,R)}J(x)$.

   On a $J(x_0)\leq J(0)<a$ donc si $||x||>R$, on a $J(x_0)\leq J(x)$. Finalement, J admet un x_0 un minimum global.
4. J est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
$\nabla J(x)=Ax-b$.
On a $\nabla J(x_0)=0$ donc $x_0=A^{-1}b$.

5.28 Exercice 1275

Soient $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. **Pour tout $x\in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F. Justifier la formule.**
2. **On définit la fonction $d_F:E\backslash F\to\mathbb{R},x\mapsto d(x,F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.**

1. Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormée de F. Fixons $x \in E$. Montrons qu'on a $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p}(x|f_i)f_i$. Appelons $x_F = \sum_{i=1}^{p}(x|f_i)f_i$.

   On a $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{(x - x_F)}_{\in F^\perp ?}$: on cherche donc à montrer que $x - x_F \in F^\perp$.

   Or, soit $i \in [\![1, p]\!]$: on a, par bilinéarité du produit scalaire : $(x - x_F|f_i) = (x[f_i) - \sum_{j=1}^{p}(x|f_j) \underbrace{(f_j|f_i)}_{\begin{array}{ll}0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j\end{array}} = 0.$

2. Soit $x \in E$. On a $d(x, F) = ||x - p_F(x)|| = ||p_{F^\perp}(x)||$. Soit $(e_1, ..., e_m)$ une base orthonormée de $F^\perp$, on a d'après la question 1,

$$d(x, F) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x|e_i)^2}$$

   - Pour $i \in [\![1, m]\!]$, $e_i^* : x \mapsto (x|e_i)$ est linéaire donc différentiable. Et pour $x \in E$, $de_i^*(x) = e_i^*$.
   - $c : t \in \mathbb{R} \mapsto t^2$ est dérivable donc différentiable et pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, $dc(t)(h) = 2th$. Ainsi, par composition $p_i = c \circ e_i^* : x \mapsto (x|e_i)^2$ et pour $x \in E$ et $h \in E$, $dp_i(x)(h) = dc(e_i^*(x)) \circ de_i^*(x)(h) = 2(x|e_i)(h|e_i)$
   - Par somme, $S : x \in E \mapsto \sum_{i=1}^{m}(x|e_i)^2$ est différentiable et pour $x \in E$ et $h \in E$, $dS(x)(h) = \sum_{i=1}^{m} 2(x|e_i)(h|e_i)$.
   - $S(E \setminus F) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $r = \sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc différentiable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}$, $dr(x)(h) = \dfrac{h}{2\sqrt{x}}$.

   Finalement, $d_F = r \circ S_{E\setminus F}$ est différentiable et pour $x \in E \setminus F$ et $h \in E$, on a $dd_F(x)(h) = dr(S(x)) \circ dS(x)(h) = \dfrac{2\sum_{i=1}^{m}(x|e_i)(h|e_i)}{2d_F(x)}$.

5.29 Exercice 1276

On note d_n le nombre de dérangements de n objets, c'est-à-dire le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe.

1. (a) **Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n\,!$.**
   (b) **Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{d_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note $D(t)$ la somme de cette série.**
   (c) **Calculer $e^t D(t)$.**
   (d) **En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.**
   (e) **Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilité p_n qu'un élément de $\mathcal{S}_n$ soit un dérangement.**
2. (a) **Pour n et p entiers naturels, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$. Montrer que $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} s_n(k)$.**
   (b) **Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $\left(s_n(p)\dfrac{x^p}{p!}\dfrac{y^n}{n!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.**

      Sa somme est notée $S(x, y)$.
   (c) **Calculer $e^x S(x, y)$.**

1. (a) On note Γ_k le nombre de permutations de n objets qui ont exactement k points fixes. On a $\mathcal{S}_n = \sqcup_{k=0}^{n}\Gamma_k$ donc $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |\Gamma_k|$. Et pour k fixé, construire un élément de Γ_k c'est choisir k objets parmi les n (qui vont être fixes) et construire un dérangement des $n-k$ objets restants. Ainsi, $|\Gamma_k| = \dbinom{n}{k} d_{n-k}$.

   (b) On a $0 \leq \dfrac{d_n}{n!} \leq 1$ et $\sum t^n$ a pour rayon de convergence 1.

   (c) Soit $t \in]-1,1[$. On a par produit de Cauchy, $e^t D(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ avec $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = 1$. Ainsi, $D(t) = \dfrac{e^{-t}}{1-t}$.

   (d) Par produit de Cauchy, $D(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e_k t^k$ avec $e_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}$. Par unicité de l'écriture d'une série entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d_n}{n!} = e_n$.

   (e) On a $p_n = \dfrac{d_n}{n!} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \to e^{-1}$.

2. (a) On note $\Gamma_k = \{f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!], |f([\![1,n]\!])| = k\}$. On a $\mathcal{F}([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]) = \sqcup_{k=0}^{p}\Gamma_k$ et ainsi, en passant aux cardinaux, $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} |\Gamma_k|$. Or, construire un élément de Γ_k, c'est choisir son image I : $\dbinom{p}{k}$ choix puis construire une surjection entre $[\![1,n]\!]$ et I : $s_n(k)$ possibilités. On a donc $|\Gamma_k| = \dbinom{p}{k} s_n(k)$.

   (b) On a, selon Fubini, $\displaystyle\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} p^n \frac{|x|^p}{p!}\frac{|y|^n}{n!} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{|x|^p}{p!}\left(\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|y|^n p^n}{n!}}_{e^{p|y|}}\right) = e^{|x|e^{|y|}}$ donc la famille $(p^n \dfrac{|x|^p}{p!}\dfrac{|y|^n}{n!})$ est sommable et ainsi, comme $0 \leq s_n(p) \leq p^n$, la famille $(s_n(p)\dfrac{|x|^p}{p!}\dfrac{|y|^n}{n!})$ l'est aussi.

   (c) Les familles étant sommables, on peut les manipuler à l'aide du théorème de Fubini ou effectuer des produits de Cauchy.
   $$e^x S(x,y) = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} s_n(p)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\left(e^x \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} s_n(p)\right).$$
   Or, par produit de Cauchy, et à l'aide de la relation démontrée en (a), $e^x \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} s_n(p) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}$.
   Finalement, $e^x S(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!} x^p$. Par Fubini,
   $$e^x S(x,y) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(py)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p e^{py}}{p!} = e^{xe^y}.$$

5.30 Exercice 1277

On mélange les cartes d'un jeu de $2n$ cartes. Avec quelle probabilité les cartes de numéro impair sont-elles correctement ordonnées ?

On représente un mélange par une $2n$-liste sans répétition à valeurs dans $[\![1,2n]\!]$. Il y en a $(2n)!$.

Un mélange qui préserve l'ordre des numéros impairs est caractérisé par le place des numéros impairs dont on choisit la place : $\dbinom{2n}{n}$ possibilités. Reste ensuite à placer les autres cartes : il y en a n à placer dans n emplacements : $n!$ possibilités. Finalement, la probabilité recherchée est $\dfrac{\binom{2n}{n}n!}{(2n)!}$ i.e. $\dfrac{1}{n!}$.

5.31 1279-Centrale-MP

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1 . On pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$ et $T_n = \dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}}$.

1. **Déterminer la loi de S_n. Qu'en déduire sur T_n ?**
2. **Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{kn^k}{(n+k)!}$ converge et calculer la somme.**
3. **Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathbf{P}\left(T_n\geqslant x\right)\mathrm{d}x$ et déterminer sa limite lorsque $n\to+\infty$.**

1. On a $G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)...G_{X_n}(t) = \left(e^{t-1}\right)^n = e^{n(t-1)}$. On reconnaît la fonction génératrice de la loi $\mathcal{P}(n)$. Ainsi $S_n\sim\mathcal{P}(n)$.

   On peut dire que T_n est centrée réduite.
2. On va faire apparaître un télescopage.

   On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{kn^k}{(n+k)!} &= \sum_{k=1}^{N}\frac{n^k(n+k-n)}{(n+k)!}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{n^k}{(k+n-1)!}-\frac{n^{k+1}}{(k+n)!}\right)\\ &= \frac{n}{n!}-\frac{n^{N+1}}{(n+N+1)!}\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{n^{N+1}}{(n+N+1)!}\leq\dfrac{n^{N+1}}{(n+1)...(n+N+1)}\leq\dfrac{n}{n+N+1}$ ce qui tend vers 0 lorsque $N\to+\infty$.

   Ainsi, la série est convergente et sa somme est $\dfrac{n}{n!}$.
3. Soit $k\geq n$ tel que $x\in]\dfrac{k-n}{\sqrt{n}},\dfrac{k+1-n}{\sqrt{n}}]$, alors $P(T_n\geq x) = P(S_n\geq k+1)$.

   En effet, si $T_n\geq x$, alors $\dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}}\geq x>\dfrac{k-n}{\sqrt{n}}$ donc $S_n>k$ et donc $S_n\geq k+1$.

   Réciproquement, si $S_n\geq k+1$, alors $\dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}}\geq\dfrac{k+1-n}{n}\geq x$.

   D'où :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}P(T_n\geq x)dx &= \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{\frac{k-n}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1-n}{\sqrt{n}}}\underbrace{P(T_n\geq x)}_{=P(S_n\geq k+1)}dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{+\infty}P(S_n\geq k+1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{n^i}{i!}e^{-n}\end{aligned}$$

   Les termes étant positifs, on peut utiliser Fubini et obtenir :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}P(T_n\geq x)dx &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\underbrace{\sum_{k=n+1}^{i}\frac{n^i}{i!}}_{\frac{n^i}{i!}(n-i)}\\ &= \frac{e^{-n}n^n}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{in^i}{(n+i)!}\\ &= \frac{e^{-n}n^n}{\sqrt{n}}\frac{n}{n!}\end{aligned}$$

   Par Stirling, cela tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

5.32 1280-Centrale-MP

1. **Rappeler les formules des probabilités totales et composées.**

   On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![1, d]\!]$. Soit $N_d = \inf\{n \geqslant 2, U_n \in \{U_1, \dots, U_{n-1}\}\}$.

2. **Quelles sont les valeurs prises par N_d ?**

3. **Montrer que $\mathbf{P}(N_d > k) = \dfrac{d!}{d^k (d-k)!}$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.**

4. **Pour tout réel $x > 0$, calculer $\lim\limits_{d\to+\infty} \mathbf{P}\left(\dfrac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right)$.**

1.
2. $N_d(\Omega) = [\![1, d+1]\!]$.
3. Soit $k \in [\![0, d]\!]$. L'événement $(N_d > k)$ correspond à l'événement où U_1,...,U_k sont deux à deux distincts. On note A_i l'événement $U_i \notin \{U_1, ..., U_{i-1}\}$.

   On a, selon la formule des probas composées :

$$\begin{aligned}
P(N_d > k) &= P(A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_k) \\
&= P(A_2)P(A_3|A_2)...P(A_k|A_1 \cap ... \cap A_{k-1}) \\
&= \frac{d-1}{d}\frac{d-2}{d}...\frac{d-k-1-1}{d} \\
&= \frac{d!}{d^k(d-k)!}
\end{aligned}$$

4. Soit $d_x = \lfloor x\sqrt{d} \rfloor$. On a $d_x \sim x\sqrt{d}$.

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x) &= P(N_d > d_x) \\
&= \frac{d!}{d^{d_x}(d-d_x)!} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi d}\left(\frac{d}{e}\right)^d}{d^{d_x}\sqrt{2\pi(d-d_x)}\left(\frac{d-d_x}{e}\right)^{d-d_x}} \\
&\sim e^{-d_x}\left(1 - \frac{d_x}{d}\right)^{d_x - d} \\
&\sim e^{-d_x} e^{(d_x - d)\ln(1 - \frac{d_x}{d})}
\end{aligned}$$

   Or,

$$\begin{aligned}
(d_x - d)\ln(1 - \frac{d_x}{d}) &= (d_x - d)(-\frac{d_x}{d} - \frac{d_x^2}{2d^2} + o(\frac{1}{d})) \\
&= d_x - \frac{3}{2}\frac{d_x^2}{d} + o(1)
\end{aligned}$$

   Finalement,

$$\begin{aligned}
P(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x) &\sim e^{-\frac{3}{2}\frac{d_x^2}{d} + o(1)} \\
&\sim e^{-\frac{d_x^2}{d}} \\
&\longrightarrow e^{-\frac{3}{2}x^2}
\end{aligned}$$

5.33 Exercice Centrale 1

Soit α un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B).$$

On pose $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{pmatrix}$.

1. **Déterminer $\alpha(I_n)$.**

2. **Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\alpha(\Delta) = P\Delta P^{-1}$. En déduire que pour toute matrice D diagonale, $\alpha(D) = PDP^{-1}$.**
3. **Déterminer α.**

1. Pour toute matrice A, $\alpha(A) = \alpha(I_n)\alpha(A) = \alpha(A)\alpha(I_n)$.
   Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. α étant bijectif, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = \alpha(A)$ et donc $B\alpha(I_n) = \alpha(I_n)B$: $\alpha(I_n)$ commute avec toute matrice. On sait alors que $\alpha(I_n)$ est une matrice scalaire. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(I_n) = \lambda I_n$. Mais, par ailleurs, on a $\alpha(I_n) = \alpha(I_n)^2$ i.e. $\lambda = \lambda^2$. λ vaut donc 0 ou 1. Ce ne peut être 0, car $\alpha(0) = 0$ par linéarité et si $\alpha(I_n) = 0$, α n'est pas bijectif. Donc $\lambda = 1$, i.e. $\alpha(I_n) = I_n$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha(A^k) = \alpha(A)^k$ (récurrence). Par linéarité de α, pour tout polynôme Q, $\alpha(Q(A)) = Q(\alpha(A))$. α étant bijectif, A et $\alpha(A)$ ont les mêmes polynômes annulateurs, donc le même polynôme minimal. On en déduit que $\pi_{\alpha(\Delta)} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - i)$ et donc que $\alpha(\Delta)$ est diagonalisable et semblable à Δ. D'où l'existence de P inversible telle que
   $\alpha(\Delta) = P\Delta P^{-1}$.
   Soit D une matrice diagonale. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses éléments diagonaux. Par interpolation de Lagrange, il existe Q un polynôme (de degré inférieur à $n-1$) tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda(i) = Q(i)$ et donc $D = Q(\Delta)$. Ce qui précède donne
   $$\alpha(D) = Q(\alpha(\Delta)) = Q(P\Delta P^{-1}) = PQ(\Delta)P^{-1} = PDP^{-1}.$$
3. Posons $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto P^{-1}\alpha(M)P$. ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$. La question précédente montre par ailleurs que $\psi(D) = D$ pour toute matrice diagonale.
   Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$. $E_{i,j}\Delta = jE_{i,j}$ et $\Delta E_{i,j} = iE_{i,j}$. On en déduit alors que $\psi(E_{i,j})\psi(\Delta) = j\psi(E_{i,j})$ et $\psi(\Delta)\psi(E_{i,j}) = i\psi(E_{i,j})$ et comme $\psi(\Delta) = \Delta$, on en déduit que $\psi(E_{i,j})\Delta = j\psi(E_{i,j})$ et $\Delta\psi(E_{i,j}) = i\psi(E_{i,j})$. On trouve alors que les lignes de $\psi(E_{i,j})$ autres que la i-ème sont nulles, de même pour les colonnes autres que la j-ème. On en déduit donc qu'il existe $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(E_{i,j}) = a_{i,j}E_{i,j}$. Comme ψ est un automorphisme, $a_{i,j} \neq 0$. On peut poser $a_{i,i} = 1$ pour $i = 1 \cdots n$.
   Par ailleurs, pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$, $\psi(E_{i,j}E_{k,l}) = \psi(E_{i,j})\psi(E_{k,l})$ et comme $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$, on obtient, avec $j = k$, $a_{i,j}a_{j,l} = a_{i,l}$, et ce, pour tous i, j, l.
   Posons, pour $i = 1 \cdots n$, $\alpha_i = a_{i,1}$. On a, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$.
   Posons $Q = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Q est inversible et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $Q^{-1}E_{i,j}Q = \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i}E_{i,j}$.
   Posons, $\tilde{\psi} : M \mapsto Q^{-1}\psi(M)Q$, alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\tilde{\psi}(E_{i,j}) = E_{i,j}$ et par linéarité, $\tilde{\psi} = \mathrm{Id}$. Finalement, $\alpha : M \mapsto RMR^{-1}$ avec $R = PQ$.
   Réciproquement, toutes les applications $M \mapsto RMR^{-1}$ avec $R \in GL_n(\mathbb{R})$ sont solutions de notre problème.

5.34 Exercice Centrale 2

1. **Quelles sont les fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telles que**
   $$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$
2. **Quelles sont les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que**
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y).$$
3. **Quelles sont les fonctions continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs réelles telles que**
   $$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ f(MN) = f(M)f(N).$$

1. Soit f une telle fonction. $f(1) = f(1^2) = 2f(1)$. Donc $f(1) = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(x^n) = nf(x)$.
   $f\left(\dfrac{1}{x}x\right) = f(1) = 0 = f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(x)$. Finalement, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(x^n) = nf(x)$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. On a $r = \dfrac{n}{m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. $mf(x^r) = f(x^n) = nf(x)$ et donc $f(x^r) = rf(x)$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers t (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^{r_n}) = r_n f(x)$ et par continuité de f, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $f(x^t) = tf(x)$.
Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $t = \ln(u)$ et $x = e$, on a alors

$$f(u) = f(e^t) = tf(e) = \ln(u)f(e).$$

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $f(u) = \alpha \ln(u)$.
On vérifie facilement, que de telles fonctions sont bien des solutions au problème posé.

2. $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$: $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.
Si $f(1) = 0$: alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x \times 1) = f(x)f(1) = 0$. f est constante en 0. La fonction identiquement nulle est bien solution.
On suppose donc dorénavant que $f(1) = 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = f(x)^n$.
Pour $x \neq 0$, $f\left(\dfrac{1}{x}x\right) = f(1) = 1 = f\left(\dfrac{1}{x}\right) \times f(x)$: $f(x) \neq 0$. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*+$ et f est continue : f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f(1) = 1 > 0$, f est (strictement) positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $g = \ln \circ f$. Alors g vérifie les hypothèses de la première question : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \alpha \ln(x)$. En composant par exp, on trouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^\alpha$. Si $\alpha < 0$, f diverge en 0^+, ce qui contredit f continue en 0. Donc $\alpha \geq 0$.
On a $f(-1)^2 = f(1) = 1$. Donc $f(-1) = 1$ ou $f(-1) = -1$. Or pour $x < 0$, $f(-x) = f(-1)f(x)$.
Si $f(-1) = 1$, f est paire et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = |x|^\alpha$. Réciproquement, une telle fonction est solution.
Si $f(-1) = -1$, f est impaire et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \text{signe}(x)|x|^\alpha$. $\alpha \neq 0$ par continuité de f en 0. Réciproquement, une telle fonction convient.
3. Soit f une solution du problème. Par continuité de f et densité des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il suffit d'étudier f sur les matrices inversibles.
On a $f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)^2$. Donc $f(I_n) = 0$ ou $f(I_n) = 1$.
Si $f(I_n) = 0$, alors pour toute matrice M, $f(M) = f(MI_n) = f(M)f(I_n) = 0$. Réciproquement, la fonction nulle convient.
On suppose donc dorénavant que $f(I_n) = 1$.
Pour M inversible, $f(MM^{-1}) = f(I_n) = 1 = f(M)f(M^{-1})$ et donc $f(M)$ est non nulle. Comme f est continue, f est de signe constant sur la composante connexe par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n. Comme $f(I_n) = 1 > 0$, f est strictement positive sur la composante connexe par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n, i.e. sur l'ensemble des matrices inversibles de déterminant strictement positif.
Montrons que f est constante égale à 1 sur les matrices inversibles de déterminant égal à 1. De telles matrices sont des produits de matrices de transvections (on transforme la matrice en l'identité uniquement en ajoutant à une ligne λ fois une autre ligne + récurrence). Or pour une transvection $T = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$, $T^2 = I_n + (2\lambda)E_{i,j}$ et quitte à multiplier le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $1/2$, T^2 et T sont semblables : il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = U^{-1}TU$ et donc $T = T^{-1}U^{-1}TU$. On verifie alors facilement que $f(T) = 1$.
On continue d'étudier f sur la composante connexe de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n. Soit M une matrice dans cet ensemble. Son déterminant est strictement positif. On écrit $M = \det(M)^{1/n} I_n N$ avec N de déterminant 1. On a donc $f(M) = f(\det(M)^{1/n} I_n)f(N) = f(\det(M)^{1/n} I_n)$.
Posons $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(xI_n)$. Comme pour la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x^\alpha$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout M dans la composante connexe précisée plus haut, $f(M) = (\det(M))^\alpha$.
Pour l'autre composante connexe, le signe de f est aussi constant. Il correspond à celui de $f(J_n)$ où J_n est la matrice identité, dont on modifie l'élément en haut à gauche en -1. De la même manière que pour I_n, on montre que $f(J_n) = -1$ ou $f(J_n) = 1$. Pour toute matrice M dans la deuxième composante connexe (i.e. dont le déterminant vaut -1), MJ_n est dans la première composante connexe (son déterminant vaut 1). Or $f(MJ_n) = f(M)f(J_n)$ et donc, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout M inversible de déterminant -1, $f(M) = f(J_n)(-\det(M))^\alpha$.
Par continuité de f et de det et par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = |\text{det(M)}|^\alpha$, ou il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \text{signe}(\det(M))|\text{det(M)}|^\alpha$.
On vérifie que ces fonctions sont bien solution du problème.
On pense à ajouter la fonction identiquement nulle trouvée au tout début à l'ensemble des solutions du problème.

6 Mines-Telecom

6.1 Exercice Mines-Telecom 1

1. **Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Notons π le polynôme minimal de u.**
Montrer que $P(u)$ est bijectif si et seulement si P et π sont premiers entre eux.
2. **On étudie la série entière $\sum \ln(n)x^n$. On note u sa somme.**
   (a) **Donner le rayon de convergence de cette série entière.**
   (b) **Développer en série entière $x \mapsto (1-x)u(x) + \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.**
   (c) **Montrer que cette dernière série entière converge normalement sur $[-1,1]$. En déduire un équivalent en 1^- de $u(x)$.**

1. Supposons que P et π soient premiers entre eux. Par la relation de Bézout, il existe A et B dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $AP + B\pi = 1$. Alors, $A(u) \circ P(u) + B(u) \circ \pi(u) = \mathrm{Id}_E$. Et comme $\pi(u) = 0$, on a $A(u) \circ P(u) = \mathrm{Id}_E$ et donc $P(u)$ est bijectif (a priori injectif, mais c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).
Supposons maintenant que $P(u)$ soit bijectif. Montrons que P et π sont premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde. P et π n'étant pas premiers entre eux, il existe un polynôme premier qui est un diviseur commun de P et de π. Comme les polynômes sont à coefficients complexes, ce polynôme premier est de la forme $X - a$ avec $a \in \mathbb{C}$. Comme $X - a$ divise π, a est racine de π et donc a est valeur propre de u : $u - a\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif. Or on peut écrire $P = Q(X-a)$ et donc $P(u) = Q(u) \circ (u - a\mathrm{Id}_E)$ est bijectif, donc $u - a\mathrm{Id}_E$ est injectif : contradiction.
2. (a) En $x = 1$, la série $\sum \ln(n)x^n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$.
Pour $x \in]0,1[$, $\ln(n)x^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $x \leq R$. Avec $x \to 1^-$, à la limite, $R \geq 1$ et finalement, $R = 1$.
   (b) Pour $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)u(x) + \ln(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$$

$$(1-x)u(x) + \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n.$$

$$(1-x)u(x) + \ln(1-x) = -x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right)x^n.$$

   (c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n}$ et $a_1 = -1$. On a $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$: $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolument.
Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$. f_n est continue sur $[-1,1]$ et $\|f_n\|_\infty \leq |a_n|$.
Ce qui précède permet d'affirmer la convergence normale de $\sum f_n$ et donc sa somme, notée f, est continue sur $[-1,1]$, en particulier, elle possède une limite finie en 1^-.
On a alors, pour $x \in]-1,1[$, $u(x) = \dfrac{f(x) - \ln(1-x)}{1-x}$. Mais comme $\ln(1-x)$ diverge vers $-\infty$ en 1^-, f est négligeable devant $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 1^- et finalement,

$$u(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

6.2 Exercice Mines-Telecom 2

1. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + \cdots + t^{n-1}} dt$.**
   (a) **Trouver la limite de (I_n). On la notera a.**
   (b) **On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2(I_n - a)$. Etudier la limite de (u_n).**
2. **Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que $\det(I_n + B) = 1$, puis que $\det(A + B) = \det(A)$.** *On pourra commencer par supposer A inversible.*

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}}$.
f_n est continue sur $[0,1]$, donc I_n est bien définie.
Pour $t \in [0,1[$, on peut réécrire $f_n(t) = \dfrac{1-t}{1-t^n}$. On en déduit donc que $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} 1-t$. Comme $f_n(1) = \dfrac{1}{n}$, $f_n(1) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 = 1-1$. On peut donc conclure que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$, vers $f : t \mapsto 1-t$, qui est continue sur $[0,1]$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq f_n(t) \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que (I_n) converge vers $a = \displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Réécrivons u_n, par linéarité de l'intégrale

$$u_n = n^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) \right) dt = n^2 \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-t^n} - (1-t) \right) dt = n^2 \int_0^1 t^n \frac{1-t}{1-t^n} dt.$$

On effectue alors le changement de variable $x = t^n$, sachant que $t \mapsto t^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante de $[0,1[$ sur $[0,1[$, on obtient alors

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1-x} n x^{1/n}(1-x^{1/n})dx.$$

Par intégration par parties avec $u : x \mapsto -\ln(1-x)$ et $v : x \mapsto n x^{1/n}(1-x^{1/n})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et leur produit convergeant vers 0 en 1, par croissances comparées (après changement de variable $y = 1-x$ et développement limité en 0 pour y). On obtient alors

$$u_n = \int_0^1 \ln(1-x) x^{1/n-1}(1-2x^{1/n})dx.$$

Posons $g_n : x \mapsto \ln(1-x)x^{1/n-1}(1-2x^{1/n})$, continue sur $[0,1[$.
(g_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers $g : x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$, continue sur $]0,1[$.
Pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|g_n(x)| \leq -3\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Or, g est intégrable sur $]0,1[$ (continue sur $]0,1[$, équivalente à $x \mapsto 1$ en 0 et dominée par $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ en 1, qui est bien intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$).
On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx.$$

On peut calculer cette intégrale en utilisant le développement en série entière de
$x \mapsto -\ln(1-x)$ et en appliquant le théorème d'intégration terme à terme. On trouve

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit que

$$I_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n^2}.$$

2. B est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Notons T une telle matrice et P inversible telle que $B = PTP^{-1}$. On a

$$\det(I_n + B) = \det(P(I_n+T)P^{-1}) = \det(I_n + T) = 1.$$

Supposons A inversible. On a alors

$$\det(A+B) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}B).$$

Mais $A^{-1}B$ est nilpotente, car si $p \in \mathbb{N}$ vérifie $B^p = 0$, alors comme $(A^{-1}B)^p = (A^{-1})^p B^p = 0$ car A et B commutent. La première partie de la question donne $\det(I_n + A^{-1}B) = 1$ et donc

$$\det(A+B) = \det(A).$$

Mais $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (fait en exemple dans le cours de topologie), on conclut par continuité du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.3 Exercice Mines-Telecom 3

1. $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+inx}$**.**

(a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(a) Déterminer $f_{|\mathbb{Z}}$ et $f_{|\mathbb{Q}}$.

(b) Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que f est monotone.

(d) Déterminer f.

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : x \mapsto e^{-n+inx}$. g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $l \in \mathbb{N}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $g_n^{(l)}(x) = (in)^l e^{-n+inx}$. On a donc $\|g_n\|_\infty = n^l e^{-n}$. Comme $n^2 n^l e^{-n}$ tend vers 0 par croissances comparées, $\sum \|g_n\|_\infty$ converge, i.e. $g_n^{(l)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

   On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^l e^{-n+inx}$.

   (b) Supposons que g soit développable en série entière au voisinage de 0 : il existe $r > 0$ et (a_n) tels que pour tout $x \in]-r, r[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait qu'alors pour $l \in \mathbb{N}$, $a_l = \frac{g^{(l)}(0)}{l!}$. Donc, $a_l = \frac{i^l}{l!} \sum_{n=0}^{+\infty} n^l e^{-n}$. On remarque que $|a_l| = \frac{1}{l!} \sum_{n=0}^{+\infty} n^l e^{-n} \geq \frac{l^l}{l! e^l}$. Or ce dernier terme est équivalent (formule de Stirling) à $\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}$. Or la série entière $\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} x^l$ a pour rayon de convergence 1, donc $\sum a_l x^l$ a un rayon de convergence inférieur ou égal à 1 : g n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
   On peut montrer qu'elle est développable en série entière sur $]-1, 1[$ en étudiant la série double $(u_{n,k}) = \left(\frac{e^{-n} i^k n^k x^k}{k!} \right)$. Elle est sommable, car $\sum_{k \geq 0} |u_{n,k}|$ converge et sa somme est $e^{n(-1+|x|)}$ et comme $-1 + |x| < 0$, $e^{n(-1+|x|)}$ est bien le terme général d'une série convergente. On conclut par le théorème de sommation par paquets pour les séries doubles à valeurs positives. On a alors, par le théorème de sommation par paquets pour les séries doubles,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

   et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^k \right) x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k n^k x^k}{k!} = g(x).$$

   On a ainsi montré que g est développable en séries entière sur $]-1, 1[$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

2. (a) f étant un morphisme de groupe, $f(0) = 0$. f étant un morphisme d'anneau, $f(1) = 1$.
   On montre ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $f(n) = n$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 = f(0) = f(n-n) = f(n) + f(-n)$ et donc $f(-n) = -f(n)$. On a donc $f(p) = p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. On montre de même que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(px) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
   Soit $r \in \mathbb{Q}$. $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $p = f(p) = f(qr) = qf(r)$, donc $f(r) = \frac{p}{q} = r$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$ et donc $f(x) = f(\sqrt{x}) f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$.

   (c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. On pose $z = y - x \in \mathbb{R}_+$. Avec la question précédente, on a $f(y) = f(x+z) = f(x) + f(z) \geq f(x)$. On a bien montré que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc deux suites (a_n) et (b_n) de rationnels telles que (a_n) soit croissante, (b_n) décroissante et toutes les deux convergent vers x. Alors, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$, par croissance de f, $f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$. La première question donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq f(x) \leq b_n$. Par encadrement, on conclut que $f(x) = x$.
   On a donc montré que f est l'identité.

6.4 Exercice Mines-Telecom 4

1. **Soit** $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$**, continue et bornée. Calculer** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx$**.**
2. **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**, avec** $n\in\mathbb{N}$**,** $n\geq 2$**, telle que** $\mathbf{rg}(A)=2$**,** $\mathbf{tr}(A)=0$**,** $A^n\neq 0$**.** A **est-elle diagonalisable ?**

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{nf(x)}{1+n^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f_n l'est aussi. Elle est intégrable sur $[0,1]$ par continuité et donc $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ est bien définie.
   On effectue le changement de variable $u=nx$. ($x\mapsto nx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.)
   On a ainsi
   $$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}du.$$
   On applique alors le théorème de convergence dominée.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $g_n : u\mapsto \dfrac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}$. g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Par continuité de f en 0, (g_n) converge simplement vers $u\mapsto\dfrac{f(0)}{1+u^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $|f(x)|\leq M$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, $|g_n(u)|\leq\dfrac{M}{1+u^2}$ et $u\mapsto\dfrac{M}{1+u^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=f(0)\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}du=\frac{\pi f(0)}{2}.$$
2. A est trigonalisable, puisqu'il s'agit d'une matrice complexe (son polynôme caractéristique est scindé). Comme le rang de A est 2, par le théorème du rang, le noyau de A est de dimension $n-2$, donc, si $n\geq 3$, 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-2$. A est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure, avec $n-2$ 0 sur la diagonale et deux (autres) valeurs complexes, λ_1 et λ_2.
   Comme la trace de A est nulle et comme la trace est un invariant de similitude, $\lambda_1+\lambda_2=0$, i.e. $\lambda_2=-\lambda_1$.
   Si $\lambda_1=0$, le polynôme caractéristique de A est X^n et par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n=0$: contradiction. Donc $\lambda_1\neq 0$.
   On a donc $\chi_A=X^{n-2}(X-\lambda_1)(X+\lambda_1)$. Les sous espaces propres associés aux valeurs propres λ_1 et $-\lambda_1$ sont de dimension 1 et on a vu que le sous-espaces propre associé à la valeur propre 0 est de dimension $n-2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est n : A est diagonalisable.
   Si $n=2$, la fin du raisonnement est encore valable (2 valeurs propres distinctes et A de taille 2).

6.5 Exercice Mines-Telecom 5

1. **Sous forme décimale,** $(2021)!$ **se termine par combien de** 0 **?**
2. **Soit** $k\in\mathbb{R}$**. Soit** $\varphi : \mathbb{R}_{2n}[X]\to\mathbb{R}[X]$ **tel que pour** $P\in\mathbb{R}_{2n}[X]$**,** $\varphi(P)=X(X+1)P'-2kXP$**.**
   (a) **Trouver** k **pour que** φ **soit un endomorphisme.**
   (b) **Trouver les valeurs propres de** φ **et les sous-espaces propres associés.**

1. On cherche le nombre de fois où 10 apparaît en facteur dans $(2021)!$. On peut aussi chercher la valuation de 2 et celle de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de $(2021)!$. Le minimum des deux sera le nombre de fois où 10 sera en facteur, et donc le nombre de 0 cherché.
   $$(2021)!=\prod_{k=1}^{2021}k=\prod_{k=1}^{1010}(2k)\prod_{k=0}^{1010}(2k+1)=2^{1010}(1010)!\prod_{k=0}^{1010}(2k+1)$$

et donc $\mathrm{vp}_2((2021)!) = 1010 + \mathrm{vp}_2((1010)!)$.
En itérant le processus, on obtient

$$\mathrm{vp}_2((2021)!) = 1010 + 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2013.$$

On procède de même avec les multiples de 5 : $\mathrm{vp}_5((2021)!) = 404 + \mathrm{vp}_2((404)!)$.
En itérant le processus, on obtient

$$\mathrm{vp}_5((2021)!) = 404 + 80 + 16 + 3 = 503.$$

$(2021)!$ finit donc par 503 zéros.

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. Ecrivons $P = \lambda X^{2n} + R_n$ avec $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On a alors

$$\varphi(P) = 2n\lambda X^{2n+1} + X^2 R_n' + 2n\lambda X^{2n} + X R_n' - 2k\lambda X^{2n+1} - 2kXR_n = 2\lambda(n-k)X^{2n+1} + S_n$$

avec $S_n \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. On choisit alors $k = n$. On aura bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
Par ailleurs, φ est bien linéaire, par linéarité de la dérivation et par propriétés des opérations sur les polynômes.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. On s'intéresse à l'équation $\varphi(P) = \lambda P$. On arrive ainsi à l'équation $X(X+1)P' - (2nX + \lambda)P = 0$.
On s'intéresse donc à l'équation différentielle (E) sur $]0,1[$

$$y' - \frac{2nx + \lambda}{x(x+1)} y = 0.$$

On décompose donc $F = \dfrac{2nX + \lambda}{X(X+1)}$ en éléments simples pour trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{2nx+\lambda}{x(x+1)}$. On doit distinguer trois cas.
$\lambda = 0$. Alors $F = \dfrac{2n}{X+1}$. Une primitive est donc $x \mapsto 2n\ln(x+1)$ et l'ensemble des solutions de (E) est la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto (x+1)^{2n}$. Le polynôme $P_0 = (X+1)^{2n}$ vérifie donc $\varphi(P_0)(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[$ et donc $\varphi(P_0) = 0$: 0 est valeur propre de φ et P_0 en est un vecteur propre.
$\lambda = 2n$, alors $F = \dfrac{2n}{X}$ et de même $P_{2n} = X^{2n}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $2n$.
Sinon, on a $F = \dfrac{\lambda}{X} + \dfrac{2n-\lambda}{X+1}$ et l'ensemble des solutions de (E) est la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto x^\lambda (x+1)^{2n-\lambda}$. On trouve donc, pour $k = 1 \cdots 2n-1$ que
$P_k = X^k (X+1)^{2n-k}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre k. On a donc trouvé $2n+1$ valeurs propres ($[\![0, 2n]\!]$) : φ est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 (pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, $E_k(\varphi) = \mathrm{Vect}(P_k)$.

6.6 Exercice Mines-Telecom 6

1. **Déterminer la nature de la série de terme général**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^\alpha}{a(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$$

avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AA^T et $A^T A$ sont semblables.**

1. Faisons une distinction de cas suivant la position de a par rapport à 1.
Si $a = 1$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^\alpha}{2^n}$. Donc $n^2 u_n$ converge vers 0 par croissances comparées. Par comparaison aux séries de Riemann, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
Si $a > 1$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{n^\alpha}{2^n}$. Par l'étude précédente, $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^\alpha}{2^n}$ converge. Par comparaison de séries à

termes positifs, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Si $a<1$ Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a^k)$. On a $\ln(v_n)=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a^k)$. Comme $a\in[0,1[$, a^n converge vers 0 et $\ln(1+a^n)\underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$. Comme $\sum a^n$ converge (série géométrique), par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \ln(1+a^n)$ converge et donc la suite $(\ln(v_n))$ converge. Notons l sa limite. Alors (v_n) converge vers e^l. On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^\alpha}{ae^l}$. Or $\sum_{n\geq 1} n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha<-1$ et comme $\dfrac{1}{ae^l}\neq 0$, $\sum_{n\geq 1}\dfrac{n^\alpha}{ae^l}$ converge si et seulement si $\alpha<-1$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha<-1$.

2. Posons $M=AA^T$ et $N=A^TA$. Ces deux matrices sont symétriques réelles. Elles sont donc diagonalisables (théorème spectral). Pour montrer qu'elles sont semblables, il suffit de montrer qu'elles ont les mêmes valeurs propres, comptées avec multiplicité ; ou encore qu'elles ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés sont de même dimension.
Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(M)$. Il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX=\lambda X$ et donc $AA^TX=\lambda X$. En composant par A^T à gauche, on obtient, $A^TAA^TX=\lambda A^TX$.
Si $A^TX\neq 0$, alors λ est valeur propre de N (et A^TX est un vecteur propre associé).
Si $A^TX=0$, alors $MX=0$ et donc $\lambda=0$. Dans ce cas, A^T n'est pas inversible, mais alors N non plus (déterminant) : dans tous les cas λ est dans le spectre de N.
De la même manière, on montre que toute valeur propre de N est valeur propre de M.
M et N ont donc le même spectre. Regardons la dimension des sous-espaces propres.
Pour $\lambda\neq 0$, ce qui précède nous incite à poser $\varphi: E_\lambda(AA^T)\to E_\lambda(A^TA)$, $X\mapsto A^TX$. On a vu que φ est bien défini. Clairement φ est linéaire. Montrons que c'est un isomorphisme.
Soit X dans le noyau de φ. Alors $A^TX=0$, donc $AA^TX=0$, or $AA^TX=\lambda X$, donc $\lambda X=0$. Mais comme $\lambda\neq 0$, $X=0$: φ est injectif.
Soit $Y\in E_\lambda(A^TA)$. Posons $X=\dfrac{1}{\lambda}AY$. Alors $AA^TX=\dfrac{1}{\lambda}AA^TAY=AY=\lambda X$. Donc $X\in E_\lambda(AA^T)$. On a $\varphi(X)=\dfrac{1}{\lambda}A^TAY=Y$. On a montré que φ est surjectif.
φ étant un isomorphisme, $E_\lambda(AA^T)$ et $E_\lambda(A^TA)$ sont de même dimension.
Il reste à voir ce qui se passe pour $E_0(AA^T)$ et $E_0(AA^T)$.
Soit $X\in E_0(AA^T)$. Alors $AA^TX=0$, en multipliant par X^T à gauche, $\|A^TX\|^2=0$ et donc $A^TX=0$. De même, si $A^TX=0$, alors $X\in E_0(AA^T)$. Donc le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0 est le noyau de A^T. On montre de même que le sous-espace propre de N associé à la valeur propre 0 est le noyau de A. Or A et A^T ont le même rang et donc par théorème du rang, leurs noyaux ont la même dimension.

   On remarque aussi que les valeurs propres de M et N sont positives. En effet, si λ est une valeur propre de M par exemple, il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX=\lambda X$ et donc
$AA^TX=\lambda X$. En multipliant par X^T à gauche, on obtient $X^TAA^TX=\lambda X^TX$, i.e.
$\|A^TX\|^2=\lambda\|X\|^2$ et finalement, $\lambda=\dfrac{\|A^TX\|^2}{\|X\|^2}\geq 0$.

6.7 Exercice Mines-Telecom 7

1. **Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, X sachant $(Y=n)$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(n,\dfrac{1}{3}\right)$. Déterminer la loi de X.**
2. **Soient A et B deux matrices colonnes comportant le même nombre de lignes. On pose $M=AB^T+BA^T$. Déterminer le rang de M. Déterminer les éléments propres de M.**

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k \mid Y=n)\mathbb{P}(Y=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \frac{2^n}{n!} e^{-2} \\
&= e^{-2} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{2^{2n-k}}{3^n} \\
&= \frac{e^{-2}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{2^{2n+k}}{3^{n+k}} \\
&= \frac{e^{-2}2^k}{k!3^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{4}{3}\right)^n \\
&= e^{-2/3} \frac{(2/3)^k}{k!}
\end{aligned}$$

   X suit donc une loi de Poisson de paramètre $2/3$.

2. Soit n le nombre de lignes de A et B. Alors $M \in \mathcal{M}_n(K)$.
   Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $M = 0$ et $\text{rg}(M) = 0$.
   Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on distingue le cas (A, B) liée de celui où (A, B) est libre.
   Supposons (A, B) liée. Comme $A \neq 0$, il existe $\lambda \in K$ tel que $B = \lambda A$ (et comme $B \neq 0$, $\lambda \neq 0$). Alors $M = 2\lambda AA^T$. Toutes les colonnes de M sont proportionnelles à A, donc le rang de M est inférieur ou égal à 1. S'il était nul, la trace de M serait nulle. Or sa trace est $2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ si on note a_k les éléments de A. Or $\lambda \neq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$, sinon tous les a_k seraient nuls et $A = 0$: ce qui n'est pas. Donc $rg(M) = 1$.
   Supposons maintenant que (A, B) soit libre. Alors, en notant b_k les éléments de B, les colonnes de M sont les $b_k A + a_k B$. Toutes ces colonnes sont dans le plan vectoriel engendré par (A, B) et donc le rang de M est inférieur ou égal à 2.
   S'il était nul, on aurait $b_k A + a_k B = 0$ pour tout k et en choisissant un k tel que $a_k \neq 0$ ou $b_k \neq 0$, alors (A, B) serait liée, ce qui n'est pas. Donc le rang de M n'est pas 0.
   S'il était 1, en supposant, par exemple que la première colonne de M ne soit pas nulle, alors toutes les autres colonnes seraient proportionnelles à la première. Pour $k = 2 \cdots n$, il existerait $\gamma_k \in K$ tel que $b_k A + a_k B = \gamma_k(b_1 A + a_1 B)$ et donc, $(b_k - \gamma_k b_1)A + (a_k - \gamma_k a_1)B = 0$ et comme (A, B) est libre, pour $k = 2 \cdots n$, $b_k - \gamma_k b_1 = 0$ et $a_k - \gamma_k a_1 = 0$ et donc $A = a_1 C$ et $B = b_1 C$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Ce qui contredit à nouveau le caractère libre de (A, B). Donc le rang de M n'est pas 1.
   On en déduit que le rang de M est 2.
   On reprend la distinction des 3 cas.
   Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $M = 0$. Le spectre de M est le singleton 0 et le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.
   Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et (A, B) liée. Il existe $\lambda \in K$ non nul tel que $B = \lambda A$.
   On a vu que M est de rang 1. Son noyau est donc de dimension $n-1$: 0 est valeur propre de M et son sous-espace propre est de dimension $n-1$. C'est l'hyperplan d'équation $A^T X = 0$.
   On remarque que $MA = 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2 A$: $2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ est la dernière valeur propre (elle est bien non nulle) et son sous-espace propre est la droite vectorielle engendrée par A.
   Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et (A, B) libre.
   On a vu que M est de rang 2. Son noyau est donc de dimension $n-2$: 0 est valeur propre de M et son sous-espace propre est de dimension $n-2$. C'est l'intersection des deux hyperplans d'équation $A^T X = 0$ et $B^T X = 0$.
   On vérifie que le plan engendré par A et B est stable par M. ($MA = B^T A.A + A^T A.B$ et $MB = B^T B.A + A^T B.B$).
   On s'intéresse donc à l'endomorphisme induit par M sur le plan vectoriel engendré par A et B. Notons $r = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $s = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ et $t = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ en reprenant les notations précédemment utilisées. La matrice représentative de cet endomorphisme est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & r \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 2rX + r^2 - st = (X-r)^2 - st$.

Comme $st > 0$, ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples. On note λ_1 et λ_2 ses deux racines ($\lambda_1 = r - \sqrt{st}$, $\lambda_2 = r + \sqrt{st}$). Alors λ_1 et λ_2 sont aussi des valeurs propres de M et on vérifie que les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles engendrées par $sA + (\lambda_1 - r)B$ et $sA + (\lambda_2 - r)B$ respectivement.
On a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
Dans tous les cas, M est diagonalisable.

6.8 Exercice Mines-Telecom 8

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(a) A est-elle inversible ?
(b) A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

(a) Quel est le domaine de définition D de S ?
(b) Exprimer S pour $x \in D$.
(c) Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx$.

1. (a) $\det(A) = 2a$. A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
(b) $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-a)$.
Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, alors χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
Si $a = 1$, alors $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, par le théorème du rang son noyau est de dimension 1 et donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $1 \neq 2$. Donc A n'est pas diagonalisable.
Si $a = 2$, alors $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, par le théorème du rang son noyau est de dimension 2 et donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Comme le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, A est diagonalisable.
Pour conclure, A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{n}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives.
Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \geq \dfrac{1}{n}$. Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge : par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge.
Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Par comparaison aux séries de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.
Le domaine de définition de S est $D = \mathbb{R}_+^*$.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $e^{-x} \in [0, 1[$, on reconnaît

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} = -\ln(1 - e^{-x}).$$

(c) S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ et donc $S(x)$ est négligeable devant $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et S est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison.
Au voisinage de 0, $1 - e^{-x}$ tend vers 0 et donc $S(x)$ est négligeable devant $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-x}}}$ et donc négligeable devant $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison.
Finalement, S est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx$. On effectue le changement de variable $y = 1 - e^{-x}$. $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0, 1[$. On obtient

$$I = -\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y} dy = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(y) y^n dy.$$

On applique le théorème d'intégration terme à terme et on trouve

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6.9 Exercice Mines-Telecom 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$, $u : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que u est diagonalisable et donner son polynôme minimal.

(c) Déterminer une base de vecteurs propres de u.

2. Soit

$$(E) \quad 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

On cherche toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles vérifiant (E).
On pose $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - 2y, x - 3y)$.

(a) Montrer que Φ est bijective et que Φ et Φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles vérifiant (E).
On pose $g = f \circ \Phi^{-1}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celles de g.

(c) Résoudre le problème posé

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors

$$u(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k.$$

$u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
u est bien linéaire.

(b) On remarque que $u^2(P) = P$. Donc $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u, donc u est diagonalisable.
Son polynôme minimal est $X - 1$, $X + 1$ ou $(X-1)(X+1)$.
Si $\pi_u = X - 1$, alors $u = Id$, ce qui n'est pas.
Si $\pi_u = X + 1$, alors $u = -Id$, ce qui n'est pas.
Donc $\pi_u = (X-1)(X+1)$.

(c) 1 est valeur propre. On montre que son sous-espace propre est le sous-espace vectoriel engendré par
si $n = 2p$, $(X^{2p} + 1, X^{2p-1} + X, \ldots, X^{p+1} + X^{p-1}, X^p)$
si $n = 2p + 1$, $(X^{2p+1} + 1, X^{2p} + X, \ldots, X^{p+1} + X^p)$.
-1 est valeur propre. On montre que son sous-espace propre est le sous-espace vectoriel engendré par
si $n = 2p$, $(X^{2p} - 1, X^{2p-1} - X, \ldots, X^{p+1} - X^{p-1})$
si $n = 2p + 1$, $(X^{2p+1} - 1, X^{2p} - X, \ldots, X^{p+1} - X^p)$.
En fait, on montre que les vecteurs de chacune de ces familles sont bien des vecteurs propres formant une famille libre et on conclut par dimension.

2. (a) Φ est linéaire et son déterminant est -1, donc Φ est bien bijectif.
Φ est clairement de classe $\mathcal{C}^2$.
$\Phi^{-1} : (u, v) \mapsto (3u - 2v, u - v)$ est clairement aussi de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) g est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition. On a $f = g \circ \Phi$. La règle de la chaîne donne

$$\begin{array}{rcl}
f(x,y) & = & g(x-2y, x-3y) \\
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}(x-2y,x-3y) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(x-2y,x-3y) \\
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & -2\dfrac{\partial g}{\partial u}(x-2y,x-3y) - 3\dfrac{\partial g}{\partial v}(x-2y,x-3y) \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x-2y,x-3y) + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x-2y,x-3y) \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & = & -2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x-2y,x-3y) - 5\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y) - 3\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x-2y,x-3y) \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x-2y,x-3y) + 12\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y) + 9\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x-2y,x-3y)
\end{array}$$

(c) On trouve alors pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 5\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y) = 0.$$

f est donc solution de E si et seulement si g est solution de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0$. On résout cette dernière équation :
g est solution de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0$ si et seulement s'il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = h(v)$
et donc si et seulement s'il existe H et J de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = H(v) + K(u)$.
Finalement, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe H et J de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = H(x-3y) + K(x-2y)$.

6.10 Exercice Mines-Telecom 10

1. **Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que rg$(M) = 1$. Montrer**

$$\mathrm{Tr}(AM) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad MAM = 0.$$

2. **Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n |\ln(1-t)|^\alpha dt$.**
   (a) **Soit $n \in \mathbb{N}$, pour quelles valeurs de α, I_n converge -t-elle ?**
   (b) **Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?**
   (c) **$\sum I_n$ converge-t-elle ?**

1. M étant de rang 1, on peut l'écrire $M = UV^T$ où U et V sont des matrices colonnes (à n lignes). On a

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(AUV^T) = \mathrm{Tr}(V^TAU) = V^TAU$$

On reconnaît alors,

$$MAM = U(V^TAU)V^T = (V^TAU)(UV^T) = \mathrm{Tr}(AM)M.$$

Comme M est de rang 1, M n'est pas nulle et donc

$$\mathrm{Tr}(AM) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad MAM = 0.$$

2. (a) Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n|\ln(1-t)|^\alpha$. f_n est continue sur $]0,1[$.

$$f_n(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{-n-\alpha}}$$

Donc, f_n est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $-n-\alpha < 1$, i.e. $\alpha + n + 1 > 0$.
Ensuite, on a

$$f_n(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} |\ln(1-t)|^\alpha$$

et par croissances comparées

$$f_n(t) = \underset{t\to 1^-}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right).$$

On en déduit alors que f_n est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
En conclusion, puisque f_n est à valeurs positives, la convergence de I_n est équivalente à l'intégrabilité de f_n et donc I_n converge si et seulement si $\alpha + n + 1 > 0$.

(b) Pour $n \geq -\alpha - 1$, I_n est bien définie, i.e. (I_n) est définie à partir d'un certain rang $n_0 = \lfloor -\alpha \rfloor$.
On applique le théorème de convergence dominée.
Chaque f_n est continue sur $]0,1[$.
(f_n) converge vers 0 sur $]0,1[$ et 0 est continue sur $]0,1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a, pour $t \in]0,1[$, $|f_n(t)| \leq f_{n_0}(t)$ et f_{n_0} est bien une fonction continue et intégrable sur $]0,1[$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que I_n converge vers 0.

(c) On calcule

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} I_k = \int_0^1 t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^\alpha dt.$$

Distinguons les cas.

• $\alpha < -1$. $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1}{1-t}|\ln(1-t)|^\alpha dt$ converge (avec le changement de variable $u = -\ln(1-t)$ au voisinage de 1) et on montre avec le théorème de convergence dominée que (S_n) converge vers $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1}{1-t}|\ln(1-t)|^\alpha dt$, en utilisant comme fonction de domination $t \mapsto \frac{t^{n_0}}{(1-t)|\ln(1-t)|^{-\alpha}}$.

• $\alpha = -1$. $\int_0^x t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$ car $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt$ diverge, (avec le changement de variable $u = -\ln(1-t)$).
Soit $M > 0$. Il existe X tel que $\int_0^X t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt \geq M+1$.
On peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $]0, X]$:
$\int_0^X t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^{-1}dt$ converge vers $\int_0^X t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt$ et donc il existe un rang m à partir duquel $\int_0^X t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^{-1}dt \geq M$ et donc par transitivité, pour $n \geq m$, $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^{-1}dt \geq M$. On a montré que (S_n) diverge vers $+\infty$ et donc $\sum I_n$ diverge.

• Pour $\alpha > -1$, on minore, pour tout n, S_n par la n-ième somme partielle du cas précédent, et donc la série diverge.
On a donc montré que $\sum I_n$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

6.11 Exercice Mines-Telecom 11

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

(b) i. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer

$$\{0\} \subset \mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}.$$

ii. Montrer que les sous-espaces propres de M sont de dimension 1.

iii. Résoudre $M^2 = A$ (équation matricielle d'inconnue M).

2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $S = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$.

(a) Déterminer la loi de S et l'espérance de S.

(b) Calculer l'espérance de T.

(c) S et T sont-elles indépendantes ?

1. (a) $\chi_A = X(X-1)^2$. χ_A est donc scindé A est trigonalisable. Son spectre est $\{0, 1\}$.

On s'intéresse à $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2. Par le théorème du rang, son noyau est de dimension 1 et donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension $1 < 2$: A n'est pas diagonalisable.

(b) i. Si M était inversible, alors A le serait, ce qui n'est pas puisque 0 est valeur propre de A. Donc M n'est pas inversible et 0 est valeur propre de M, i.e. $\{0\} \subset \mathrm{Sp}(M)$.
Soit λ une valeur propre de M. Il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$ et donc $M^2X = \lambda^2 X$, i.e. $AX = \lambda^2 X$. λ^2 est donc dans le spectre de A, i.e. $\lambda^2 = 0$ ou $\lambda^2 = 1$ d'où $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

ii. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) \subset E_{\lambda^2}(A)$. Les sous-espaces propres de A étant de dimension 1, ceux de M ne peuvent être que de dimension au plus 1. Mais un sous-espace propre étant de dimension au moins 1, ils sont de dimension 1.

iii. $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_0(M)$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_{-1}(M)$ ou $= E_1(M)$. 0 ne peut pas être la seule valeur propre de M, sinon, M serait nilpotente et A aussi, ce qui n'est pas puisque A possède d'autres valeurs propres que 0. M ne peut pas avoir trois valeurs propres différentes, sinon elle serait diagonalisable et donc A aussi. On en déduit que si M vérifie $M^2 = A$ alors

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec a, b et c dans $\mathbb{R}$. Avec les valeurs propres mises en jeu, dans le premier cas, forcément $c = 1$ et dans le deuxième, forcément, $c = -1$. En injectant dans $M^2 = A$, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que ces deux matrices conviennent.

2. (a) $S(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S \geq k) = \mathbb{P}((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2.$$

$$\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(S \geq k) - \mathbb{P}(S \geq k+1) = \frac{2n - 2k + 1}{n^2}.$$

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{2n - 2k + 1}{n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

(b) $S + T = X + Y$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(S) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

(c) $\mathbb{P}((S = 2) \cap (T = 1)) = 0$ (le minimum ne peut pas être strictement plus grand que le maximum) alors que $P(S = 2) = \dfrac{2n-3}{n^2} \neq 0$ et $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$ par indépendance de X et de Y et donc $\mathbb{P}(T = 1) = \dfrac{1}{n^2} \neq 0$. S et T ne sont donc pas indépendantes.

6.12 Exercice Mines-Telecom 12

1. (E) $y'' = (x^4+1)y$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.

(b) On admet que $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $g : x \mapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2}dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

2.(a) Rappeler la factorisation de $a^n - b^n$ avec a, b et n des entiers naturels, n non nul.

(b) Montrer que si 2^n+1 est premier, alors n est de la forme $n = 2^p$, avec $p \in \mathbb{N}$.

(c) Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $F_m = 2^{(2^m)}+1$. Montrer que si $n \neq m$ alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
Les F_n sont les nombres de Fermat. F_5 n'est pas premier...

1. (a) C'est la conclusion du théorème de Cauchy-Lipschitz.

(b) f peut-elle s'annuler sur $\mathbb{R}_+^*$? (Elle ne s'annule pas en 0). Supposons que f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Si $f'(x_0) = 0$, alors, par l'unicité donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $f = 0$, ce qui n'est pas. Donc $f'(x_0) \neq 0$. Mais alors $f(x) \underset{x \to x_0, x \neq x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$. Mais dans ce cas, $\dfrac{1}{f^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de x_0 : contradiction.
Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et $\dfrac{1}{f^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Alors, comme elle est aussi intégrable, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{-1}{f^2(x)}$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = f'(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2}dt - \frac{1}{f(x)}$.
On en déduit que g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, i.e. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et que pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g''(x) = f''(x)\int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2}dt - \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (1+x^4)f(x)\int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2}dt = (1+x^4)g(x).$$

g est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a)

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

(b) Supposons que n possède un diviseur premier impair. Alors, $n = pq$, avec p premier impair. On peut alors écrire, avec la première question,

$$2^n + 1 = (2^q)^p - (-1)^p = (2^q+1)\sum_{k=0}^{p-1} (2^q)^k (-1)^{p-1-k}.$$

2^q+1 divise ainsi 2^n+1. Mais comme 2^n+1 est premier, ou bien $2^q+1 = 1$ ou bien $2^q+1 = 2^n+1$. Les deux aboutissent à une contradiction. Donc, n ne possède que des diviseurs premiers pairs, i.e. ne possède que 2 comme diviseur premier : n est une puissance de 2.

(c) Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, avec $n < m$. On écrit $m = n+p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$F_m = 2^{(2^{n+p})} + 1 = \left(2^{(2^n)}\right)^{2^p} + 1 = (F_n - 1)^{2^p} + 1 = F_n \sum_{k=1}^{2^p} \binom{2^p}{k} F_n^{k-1}(-1)^{2^p-k} + 2.$$

Si d est un diviseur commun à F_n et F_m, alors, d divise 2. Donc, ou bien $d = 1$ ou bien $d = 2$. Si $d = 2$, comme d divise F_n, d divise $F_n - 2^{(2^n)}$ et donc 2 divise 1 : contradiction.
Finalement, $d = 1$ et F_n et F_m sont premiers entre eux.

6.13 Exercice Mines-Telecom 13

1. Soit A une matrice antisymétrique. On pose $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)A - M^T$.

(a) Montrer que φ est un automorphisme.

(b) Montrer que φ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et la dimension de ses sous-espaces propres.

2. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

(a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$.

1. (a) φ est linéaire par linéarité de la trace et de la transposition. φ est donc un endomorphisme.
Soit M dans le noyau de φ. Alors, $M^T = \mathrm{Tr}(M)A$ et donc $M = -\mathrm{Tr}(M)A$. M est donc antisymétrique : sa trace est nulle. Finalement, $M = 0$. φ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie : φ est un automorphisme.

(b) On vérifie que $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$. $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est donc un polynôme annulateur de φ scindé à racines simples : φ est diagonalisable.
On a aussi $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$.
Premier cas : $A = 0$. Alors $E_1(\varphi) = A_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(\varphi) = S_n(\mathbb{R})$.
Deuxième cas : $A \neq 0$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = M$. Alors $\mathrm{Tr}(M)A = M + M^T$ et si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$, alors $A = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(M)}(M+M^T)$ est symétrique, comme elle est aussi antisymétrique, $A = 0$: contradiction. Donc $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Alors, $M^T = -M$. On a montré que $E_1(\varphi) \subset A_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, on vérifie que $A_n(\mathbb{R}) \subset E_1(\varphi)$. (La trace d'une matrice antisymétrique est nulle.)
$E_1(\varphi)$ est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Comme φ est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres est n^2 et donc $E_{-1}(\varphi)$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. (a) Posons $g : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$. g est continue sur $]0,1[$. Posons $G : x \mapsto \displaystyle\int_{1/2}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. Par le théorème fondamental de l'analyse, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et donc $f : x \mapsto G(x^2) - G(x)$ est continue par composition (en fait de classe $\mathcal{C}^1$).
$g(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -1$ et $t \mapsto -1$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$, par comparaison g est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$ et donc G possède une limite en 0^+.
$g(t) \underset{t\to 1^+}{\sim} \ln(1-t)$, $g(t) \underset{t\to 1^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$, par comparaison g est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$, et donc G possède une limite en 1^-.
Par composition et linéarité, f possède des limites en 0^+ et en 1^- (et ces limites sont nulles). f est donc prolongeable par continuité à $[0,1]$.

(b) On a déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et que f est continue sur $[0,1[$ en posant $f(0) = 0$. On va montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ avec le corollaire du théorème des accroissements finis. Pour cela, on calcule, pour $x \in]0,1[$,
$$f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2\ln(1-x^2) - \ln(1-x)}{x}$$
Avec le développement limité usuel de $x \mapsto \ln(1-x)$, on obtient
$$f'(x) = 1 + \mathcal{O}(x) \quad [x \to 0^+].$$
Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et $f'(0) = 1$.

6.14 1419-IMT-MP

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbf{tr}(M)A - M^T$.

1. (MPSI) L'application ϕ est-elle un automorphisme ?

2. L'application ϕ est-elle diagonalisable ? Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

1. ϕ est bien linéaire. On étudie $\ker\phi$.

   Soit $M \in \ker\phi$, alors $M^T = \mathrm{tr}(M)A$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda A^T$. Comme $\phi(M) = 0$, on a $\lambda\mathrm{tr}(A)A - \lambda A = 0$.

   - Si $A = 0$, on a ϕ qui est bien un automorphisme.
   - Si $\mathrm{tr}(A) = 1$, alors $A^T \in \ker\phi$ donc ϕ n'est pas un automorphisme.
   - Si $A \neq 0$ et si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$, alors $\lambda\mathrm{tr}(A)A - \lambda A = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ et ainsi, $\ker\phi = \{0\}$. Par théorème du rang, ϕ est un automorphisme.

2. - Si M est symétrique de trace nulle, on a $\phi(M) = -M$. Ainsi, -1 est valeur propre et $E_{-1} \supset \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\} = V_{-1}$ (qui est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ puis c'est un hyperplan de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$)
   - Si M est antisymétrique, on a $\phi(M) = M$. Ainsi, 1 est valeur propre et $E_1 \supset \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = V_1$ (qui est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$)
   - $\phi(I_n) = nA - I_n = \underbrace{nA - \mathrm{tr}(A)I_n}_{tr\ =0} + (\mathrm{tr}(A) - 1)I_n$.
   - On a $V_1 \oplus V_{-1}$ inclus dans l'ensemble des matrices de trace nulle et de même dimension : c'est l'ensemble des matrices de trace nulle. Soit $\mathcal{B}'$ obtenue par concaténation d'une base de V_1 et d'une base de V_{-1}. Comme I_n n'est pas de trace nulle, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{I_n\}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice de ϕ dans cette base est
   $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & ? \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & ? \\ & & & -1 & & & ? \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & ? \\ & & & & & & \mathrm{tr}(A)-1 \end{pmatrix}$$
   Ainsi :
   - Si $\mathrm{tr}(A) - 1 \notin \{-1, 1\}$, alors ϕ est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(\phi) = \{-1, 1, \mathrm{tr}(A) - 1\}$, $E_1 = \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$, $E_{-1} = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $E_{\mathrm{tr}(A)-1}$ est de dimension 1. Il nous reste à trouver M non nulle telle que $\phi(M) = \lambda M$ avec $\lambda = \mathrm{tr}(A) - 1$.

     Notons $M = M_1 + M_2$ et $A = A_1 + A_2$ avec M_1 et A_1 symétriques et M_2 et A_2 antisymétriques.

     On a alors $\phi(M) = \lambda M$ ssi $\mathrm{tr}(M_1)(A_1 + A_2) - M_1 + M_2 = \lambda M_1 + \lambda M_2$ ssi $\begin{cases} \mathrm{tr}(M_1)A_1 = \underbrace{(\lambda+1)}_{=\mathrm{tr}(A_1)} M_1 \\ \mathrm{tr}(M_1)A_2 = (\lambda - 1)M_2 \end{cases}$.

     On choisit $M_1 = A_1$ et $M_2 = \dfrac{\mathrm{tr}(A)}{\mathrm{tr}(A) - 2}A_2$. On a alors $E_{\mathrm{tr}(A)-1} = \mathrm{Vect}(A_1 + \dfrac{\mathrm{tr}(A)}{\mathrm{tr}(A) - 2}A_2)$.
   - Si $\mathrm{tr}(A) - 1 \in \{-1, 1\}$, alors ϕ est diagonalisable ssi $(X - 1)(X + 1)$ annule ϕ. Or, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi^2(M) - M = ... = \mathrm{tr}(M)\big((\mathrm{tr}(A) - 1)A - A^T\big)$.
     - Si $(\mathrm{tr}(A) - 1)A - A^T \neq 0$, ϕ n'est pas diagonalisable.
     - Si $(\mathrm{tr}(A) - 1)A - A^T = 0$, ϕ est diagonalisable et son spectre est $\{-1, 1\}$.
       - Si $\mathrm{tr}(A) - 1 = 1$, alors $\mathrm{tr}(A) = 2$ et $A - A^T = 0$ donc A est symétrique et n'est pas dans V_{-1} et $\phi(A) = (\mathrm{tr}(A) - 1)A$ donc $E_1 = V_1 \oplus \mathrm{vect}(A)$ (de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$) et $E_{-1} = V_{-1}$ (de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$).
       - Si $\mathrm{tr}(A) - 1 = -1$. On a $\phi(I_n - \dfrac{n}{2}A) = nA - I_n + \dfrac{n}{2}A = -(I_n - \dfrac{n}{2}A)$. Donc $I_n - \dfrac{n}{2}A \in E_{-1}$ et $I_n - \dfrac{n}{2}A \notin V_{-1}$. Finalement, $E_{-1} = V_{-1} \oplus \mathrm{Vect}(A)$ et $E_1 = V_1$.

6.15 1421-IMT-MP

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\Phi_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.

1. **Quels sont les éléments propres de ϕ_u ?**
2. **Montrer que ϕ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.**

1. - Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ non nulle. On suppose qu'on a $\Phi_u(v) = \lambda v$. Alors, pour tout $x \in E$, $u(v(x)) = \lambda v(x)$. Comme v n'est pas nulle, λ est valeur propre de u et pour tout $x \in \mathbb{E}$, $v(x) \in E_{u,\lambda}$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\Phi_u) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $v \in E_{\Phi_u} \Rightarrow \mathrm{Im} v \subset E_{u,\lambda}$.
   - Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Im} v \subset E_{u,\lambda}$. Alors pour $x \in E$, $v(x) \in E_{u,\lambda}$ donc $u(v(x)) = \lambda v(x)$. x étant quelconque, on a $\Phi_u(v) = \lambda v$.

     Finalement, $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(\Phi_u)$ et, de plus, si λ est valeur propre, notons $m_\lambda = \dim E_{u,\lambda}$, le sous-espace propre de Φ_u associé à la valeur propre λ est $\{v \in \mathcal{L}(E), v(E) \subset E_{u,\lambda}\}$ et il est de de dimension $n.m_\lambda$.
2. - $\Rightarrow$ On suppose que Φ_u est diagonalisable. $\mathcal{L}(E)$ est alors la somme directe des sous-espaces propres de Φ_u. On a donc $n^2 = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} n.m_\lambda$ et donc $n = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda$. u est donc diagonalisable.
   - On procède de même pour $\Leftarrow$.

6.16 1425-IMT-MP

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et (E) l'équation $AM = MB$.

1. **On suppose que (E) admet une solution $M \neq 0$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(B)$. Montrer que A et B admettent une valeur propre commune.**
2. **Établir la réciproque.**

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $A^k M = A^{k-1}AM = A^{k-1}MB = ... = MB^k$ (mieux : faire une récurrence).

   Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a $P(A)M = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k A^k.M = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k M = \sum_{k=0}^{n} a_k M B^k = M \sum_{k=0}^{n} a_k B^k = MP(B)$.

   En particulier, avec $P = \chi_A$, on a $P(A) = 0$ d'après Cayley-Hamilton donc $M\chi_A(B) = 0$. Comme $M \neq 0$, on a $\chi_A(B)$ non inversible. Notons $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$: $\chi_A(B) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(B - \lambda_i I_n)$. Comme $\chi_A(B)$ n'est pas inversible, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $B - \lambda_i I_n$ soit non inversible. λ_i est une valeur propre commune à A et B.
2. On suppose ici que A et B ont une valeur propre commune : λ. λ est alors valeur propre de B^T. Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et Y un vecteur propre de B^T pour la valeur propre λ.

   Soit $M = XY^T$. Alors, M n'est pas nulle et $AM = AXY^T = \lambda XY^T = \lambda M$ et $MB = XY^T B = X(B^T Y)^T = X\lambda Y^T = \lambda M$ donc $AM = BM$.

6.17 1426-IMT-MP

1. **Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_i)$.**

   Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P pour que u soit diagonalisable et la démontrer.
2. **Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$. Est-il possible d'avoir simultanément $Q = (X - 1)(X^2 + 1)$ annulateur de f et $\mathrm{Tr}(f) = 0$?**
3. **Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$ tel que $Q(g) = 0$. Calculer $\det(g)$.**

1. Montrons que u est diagonalisable ssi $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

   Comme les λ_i sont distincts, d'après le théorème de décomposition des noyaux on a

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(u - \lambda_i Id)$$

Or, u est diagonalisable ssi $\bigoplus_{k=1}^{p} \ker(u - \lambda_i Id) = E$ et selon le théorème de décomposition des noyaux, cela équivaut à $\ker P(u) = E$ i.e. $P(u) = 0$.

2. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^7$. Alors $(X-1)(X-i)(X+i)$ est un polynôme annulateur de A qui est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$. On en déduit que le spectre complexe de A est inclus dans $\{1, -i, i\}$ et A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons a, b et c les multiplicités respectives de 1, $-i$, i. On a $\mathrm{tr}(A) = 0$ donc $a + bi - ci = 0$. Ainsi, $b = c$ et $a = 0$. De plus, on a $a + b + c = 7$: c'est impossible !
3. On reprend le raisonnement précédent, on n'a plus l'hypothèse $\mathrm{tr}(g) = 0$.

   Premièrement, on a $\det g = 1^a i^b (-i)^c$.

   De plus,
$$\begin{array}{rcl} \ker(A - iId) & \to & \ker(A + iId) \\ X & \mapsto & \overline{X} \end{array}$$
   est un isomorphisme donc $\dim \ker(A - iId) = \dim(A + iId)$ et par conséquent, $b = c$.

   Finalement, $\det g = (-1)^b$. Comme $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $\det g \in \{-1, 1\}$.

6.18 1450-IMT-MP

1. **Soit $q \in \mathbb{N}$. On pose $I_q = \int_0^{+\infty} t^q e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Montrer que I_q est bien définie et que $I_q = q!$.**
2. **Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire.**
3. **Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\phi(P) = XP'' + (1-X)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**
4. **Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\langle \phi(P), Q \rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique.**

1.
   - $t \mapsto t^q e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc d'intégrale convergente en 0. En $+\infty$, on a $t^q e^{-t} = o(1/t^2)$ avec $t \mapsto 1/t^2$ positive et intégrable en $+\infty$. Finalement, I_q existe bien.
   - Soit $q \geq 1$. Pour calculer I_q, on fait une intégration par partie dans laquelle on pose $u(t) = t^q$ et $v(t) = e^{-t}$. uv a bien une limite finie (nulle) en $+\infty$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} t^{q-1}e^{-t}dt$ converge (ce qu'on savait déjà) et
$$\begin{array}{rcl} I_q & = & [-t^q e^{-t}]_0^{+\infty} + q\int_0^{+\infty} t^{q-1}e^{-t}dt \\ & = & qI_{q-1} \end{array}$$
     On obtient finalement, $I_q = q!I_0$ et comme $I_0 = 1$, on a bien $I_q = q!$.
2.
   - $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est bien convergente car $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-1}$ est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et, en $+\infty$, $P(t)Q(t)e^{-t} = o(1/t^2)$.
   - $\langle , \rangle$ est bien symétrique
   - $\langle , \rangle$ est bilinéaire : par symétrie, il suffit de vérifier la linéarité par rapport à la première variable. Soit P, Q et R trois polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{array}{rcl} \langle \lambda P + Q, R \rangle & = & \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(t)R(t)e^{-t}dt \\ & = & \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t}dt \\ & = & \int_0^{+\infty} \lambda P(t)R(t)e^{-t} + Q(t)R(t)e^{-t}dt \\ & = & \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt \\ & = & \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle \end{array}$$
   - $\langle , \rangle$ est positive : par positivité de l'intégrale, si P est un polynôme, comme $P^2(t)e^{-t} \geq 0$, on a $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geq 0$.

- $\langle , \rangle$ est définie : si $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$, comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive, on en déduit qu'on a pour tout $t \geq 0$, $P^2(t)e^{-t} = 0$. Ainsi, P a une infinité de racines (tous les réels positifs sont racines) donc P est nul.

3. - ϕ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$: car si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P)$ est bien un polynôme et on a det $XP'' \leq \deg P$ et $\deg(1-X)P' \leq \deg P$. Finalement, $\deg \phi(P) \leq n$.
   - ϕ est linéaire : soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(XP'' + (1-X)P') + XQ'' + (1-X)Q' \\ &= \lambda\phi(P) + \phi(Q)\end{aligned}$$

4. On remarque que la dérivée de $t \mapsto tP'(t)e^{-t}$ est $t \mapsto \underbrace{(-tP'(t) + P'(t) + tP''(t))}_{\phi(P)(t)} e^{-t}$. Ainsi, une intégration par parties (qui est bien possible) donne

$$\begin{aligned}\langle \phi(P), Q \rangle &= \int_0^{+\infty} \phi(P)(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= \underbrace{[tP'(t)Q(t)e^{-t}]_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt\end{aligned}$$

   De la même façon, $\langle P, \phi(Q) \rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)dt$. Ainsi, ϕ est bien symétrique.

6.19 1452-IMT-MP

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^{2022} = A^{2024}$. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} {a_{i,j}}^2 = \mathrm{rg}(A)$.

Par le théorème spectral, A est diagonalisable dans une BON. Les racines de $X^{2022} = X^{2024}$, qui est un annulateur de A, sont $\{-1, 0, 1\}$ donc le spectre de A est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

Il existe donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^T \underbrace{\mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)}_{D} P$ avec $\{a_1, ..., a_n\} \subset \{-1, 0, 1\}$.

On a $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = \mathrm{tr}(A^T A) = \mathrm{tr}(D^T D) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(A)$.

6.20 1454-IMT-MP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

1. **Trouver $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $P(A) = 0$. Que dire sur A et $\mathrm{Sp}(A)$?**
2. **On suppose, pour cette question seulement, que $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $A - I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.**

1. On a $A^T = I_n - A^2$ donc $(A^T)^2 = I_n + A^4 - 2A^2$.

   Or, $(A^2)^T + A = I_n$ (on passe la relation donnée à la transposée), donc

$$I_n - A = I_n + A^4 - 2A^2$$

   ie

$$A^4 - 2A^2 + A = 0$$

   On a $P = X(X-1)(X - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2})(X - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2})$. Ce polynôme étant simplement scindé, on en déduit que A est diagonalisable.

   De plus $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$

2. - Montrons que 1 n'est pas valeur propre de A. Supposons qu'il existe X non nul tel que $AX = X$. Alors comme on a $A^2X + A^TX = X$, on en déduit qu'on a $X + A^TX = X$ soit $A^TX = 0$. Ainsi, $0 \in \mathrm{Sp}(A^T)$ et donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ (puisque A et A^T ont le même spectre).
   - Montrons que A est symétrique. Comme 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de A, le polynôme $(X - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2})(X - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2})$ est annulateur de A. On a donc $A^2 + A - I_n = 0$. Or, $A^2 + A^T - I_n = 0$ donc finalement, $A = A^T$.

6.21 1459-IMT-MP

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout vecteur $x \in E$, la suite $(\|x - u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence.**
2. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.**

1. On sait que $(||u_n||)$ converge. La suite $(||u_n||)$ est donc bornée et ainsi, (u_n) l'est aussi. Comme E est de dimension finie, (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence. On la note u.
2. On a en particulier $(||u - u_n||)$ convergente. Or, 0 est valeur d'adhérence de cette suite, donc $||u - u_n|| \to 0$. Ainsi, (u_n) est convergente.

6.22 1461-IMT-MP

Soit N définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $N\left(\sum_{i=0}^{n} a_iX^i\right) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$

1. **Montrer que N est une norme.**
2. **Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a)$. Pour quelles valeur de a, l'application ϕ est-elle continue pour la norme N ?**

1. - N est bien définie puisque la suite des coefficients d'un polynôme est à support fini
   - N est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
   - Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda P = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_iX^i$. Alors $N(\lambda P) = \max_{0\leq i\leq n} |\lambda a_i| = |\lambda| \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$ (propriété du cours sur les max/sup).
   - Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et si $N(P) = 0$ alors $\max_{0\leq i\leq n} |a_i| = 0$ donc pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $|a_i| = 0$ et finalement, $P = 0$.
   - Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_iX^i$, alors $N(P + Q) = \max_{0\leq i\leq n} |a_i + b_i|$. Or, pour $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned} |a_i + b_i| &\leq |a_i| + |b_i| \\ &\leq \max_{0\leq i\leq n} |a_i| + \max_{0\leq i\leq n} |b_i| \end{aligned}$$

   et ainsi, $\max_{0\leq i\leq n} |a_i + b_i| \leq \max_{0\leq i\leq n} |a_i| + \max_{0\leq i\leq n} |b_i|$ ce qui donne bien $N(P + Q) \leq N(P) + N(Q)$.
2. ϕ est une forme linéaire. Ainsi, la continuité de ϕ équivaut à l'existence d'une constante K telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$|\phi(P)| \leq K.N(P)$$

- Supposons que $|a| < 1$ et montrons que ϕ est continue. Notons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. On a

$$\begin{aligned} |\phi(P)| &\leq \sum_{i=0}^{n} \underbrace{|a_i|}_{\leq N(P)} |a^i| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} N(P)|a|^i \\ &\leq N(P)\frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \\ &\leq \frac{1}{1-|a|}N(P) \end{aligned}$$

- Supposons $|a| > 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = X^k$. On a

$$\frac{|\phi(P_k)|}{N(P_k)} = |a|^k \to +\infty$$

donc ϕ n'est pas continue.
- Supposons $|a| = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = 1 + X^2 + ... + X^{2k}$. On a $\phi(P) = k+1$ donc

$$\frac{|\phi(P_k)|}{N(P_k)} \to +\infty$$

Ainsi, ϕ n'est pas continue.

6.23 1463-IMT-MP

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$**. Déterminer** $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n$**.**

- Si $b = 0$, alors $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos^n(a/n) & 0 \\ 0 & \cos^n(a/n) \end{pmatrix}$. Or,

$$\cos^n(a/n) = \exp(n\ln(\cos(a/n))$$

et

$$\begin{aligned} n\ln(\cos(a/n)) &\sim n(\cos(a/n)-1) \\ &\sim -\frac{a^2}{2n} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Donc $\cos^n(a/n) \to 1$ et finalement, $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n = I_2$
- Si $b \neq 0$. Alors, à partir d'un certain rang, on a $\frac{b}{n} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin\frac{b}{n} \neq 0$.

  Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}$ est $(X - \cos(a/n))^2 - \sin^2(b/n)$. Ses racines sont

$$\lambda = \cos(a/n) + \sin(b/n) \text{ et } \mu = \cos(a/n) - \sin(b/n)$$

Elles sont distinctes.

De plus, $E_\lambda = \text{Vect}(1,1)$ car $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix} - \lambda I_2 = \sin\frac{b}{n}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et de même, $E_\mu = \text{Vect}(-1,1)$. La matrice est donc diagonalisable et

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\lambda^n = \exp(n\ln(\cos(a/n) + \sin(b/n)))$ et

$$\begin{aligned} n\ln(\cos(a/n) + \sin(b/n))) &= n\ln(1 + \frac{b}{n} + o(1/n)) \\ &\sim b \\ &\to b \end{aligned}$$

donc $\lambda^n \to e^b$. De même, $\mu^n \to e^{-b}$.

Finalement,

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^b & 0 \\ 0 & e^{-b} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n \to \begin{pmatrix} \text{ch}(b) & \text{sh}(b) \\ \text{sh}(b) & \text{ch}(b) \end{pmatrix}$$

6.24 1464-IMT-MP

Soient E un espace euclidien et $\mathcal{K}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Soit p un projecteur.

1. **Montrer que : $p \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.**
2. **Montrer que $\mathcal{K}$ est un compact.**

1.
   - Supposons que p est un projecteur orthogonal : soit $F = \ker p$ et $G = \text{Im } p$. On sait que p est la projection sur G dans la direction de F et, comme p est un projecteur orthogonal, on a $F \perp G$.

     Soit $x \in E$ qu'on décompose : $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$. On a $p(x) = x_G$, et, $||x||^2 = ||x_F||^2 + ||x_G||^2$. Ainsi, on a bien $||x|| \geq ||p(x)||$.
   - Supposons que pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leq ||x||$. Soit $F = \ker p$ et $G = \text{Im } p$. Il s'agit de montrer que $F \perp G$. Soit $(f,g) \in F \times G$.

     On a $||p(f+g)||^2 \leq ||f+g||^2$ donc $||g||^2 \leq ||f||^2 + ||g||^2 + 2(f|g)$ ainsi

     $$0 \leq ||f||^2 + 2(f|g)$$

     Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $\lambda g \in G$, on a aussi (en remplaçant g par λg)

     $$0 \leq ||f||^2 + 2\lambda(f|g)$$

     Mais, si $(f|g) \neq 0$, par exemple $(f|g) > 0$, alors $||f||^2 + 2\lambda(f|g) \to -\infty$ lorsque $\lambda \to -\infty$ ce qui n'est pas possible.

     Finalement, on a nécessairement, $(f|g) = 0$.

2. $\mathcal{K}$ est une partie de $\mathcal{L}(E)$ qui est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Pour montrer que $\mathcal{K}$ est compact, il suffit de montrer que c'est une partie fermée et bornée de $\mathcal{L}(E)$.

   - $\mathcal{K}$ est fermée : soit (p_n) une suite de projecteurs orthogonaux qui converge vers $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que f est un projecteur orthogonal. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \circ p_n = p_n$ (*). Comme l'application $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g$ est bilinéaire et que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, elle est continue. Ainsi, lorsque $n \to +\infty$, $p_n \circ p_n \to f \circ f$. Finalement, un passage à la limite dans (*) donne $f \circ f = f$. On a montré que f est un projecteur.

     De plus, soit $x \in E$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||p_n(x)|| \leq ||x||$ donc lorsque $n \to +\infty$, on obtient $||f(x)|| \leq ||x||$. Finalement, f est bien un projecteur orthogonal.
   - $\mathcal{K}$ est bornée : pour tout $p \in \mathcal{K}$, on a $|||p||| \leq 1$ d'après la question 1. Donc, $\mathcal{K} \subset B_{f,|||.|||}(0, 1)$.

6.25 1465-Dauphine-MP

Trouver la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right)$.

On sait qu'on a au voisinage de 0

$$\tan u = u + o(u^2)$$

qu'on peut aussi écrire

$$\tan u = u + u^2 \varepsilon(u)$$

où ε est une fonction de limite nulle en 0.

On a donc, en notant $H_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \\ &= H_{2n} - H_n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \end{aligned}$$

Or, on sait qu'on a

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc

$$H_{2n} - H_n = \ln 2 + o(1)$$

D'autre part,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{1}{k+n}}_{\leq \frac{1}{n}}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right)$$

Soit $\alpha > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in [-\delta, \delta]$, on ait $|\varepsilon(x)| \leq \alpha$. Soit N tel que si $n \geq N$, on ait $\dfrac{1}{n} \leq \delta$. Alors, pour $n \geq N$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \leq n\alpha$$

et finalement,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \leq \alpha$$

ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right) \to \ln 2$$

6.26 1466-IMT-MP

Montrer la convergence des suites $(x_n),(y_n),(z_n)$ définies par leurs premiers termes respectifs x_0, y_0, z_0 et les relations, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{4}$, $y_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4}$, $z_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2}$.

En notant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, on a

$$X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} X_n$$

On a $A - \frac{1}{4}I_3$ de rang 1 donc $\frac{1}{4}$ est valeur propre de A et $E_{1/4} = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$.
De plus, $(1,1,1)$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 1.
$((1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1))$ est une base de vecteurs propres de A, ainsi, A est diagonalisable et on a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On obtient $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

puis

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\to P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\to \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, comme $X_n = A^n X_0$, on a, $X_n \to \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_0$

et ainsi, (x_n), (y_n) et (z_n) convergent et ont pour limite (commune) $\frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0)$.

6.27 1469-Dauphine-MP (MPSI)

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 .

1. **Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \min(x_0, \ldots, x_n)$.**
2. **Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \max\{x_k, k \geqslant n\}$.**

1. On rappelle qu'un ensemble fini de réels admet un minimum et un maximum.

   On raisonne par l'absurde : supposons que l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_n = \min(x_0, ..., x_n)$ est fini. On note N son maximum. On a donc $x_N = \max(x_0, ..., x_N)$ et $x_N > 0$.

   Comme $x_n \to 0$, il existe un rang N' tel que si $n \geq N'$, alors $0 < x_n \leq \frac{x_N}{2}$. On a $\min(x_0, ..., x_{N'}) \leq \frac{x_N}{2}$. Soit $k \in [\![0, N']\!]$ tel que $\min(x_0, x_1, ..., x_{N'}) = x_k$. On a alors aussi $\min(x_0, x_1, ..., x_k) = x_k$. Montrons que $k > N$ afin d'obtenir une contradiction.

   On a $x_k \leq \frac{x_N}{2}$ et comme $x_N = \min(x_0, ..., x_N)$, pour tout $\ell \leq N$, $x_\ell \geq x_N$.

   Ainsi, on a $k > N$ ce qui contredit la définition de N.

2. • Commençons par justifier que si $n \in \mathbb{N}$, alors $\{x_k, k \geq n\}$ admet un maximum.

En effet, on a $x_n > 0$ et $x_p \to 0$. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq N$, alors $0 < x_p < \frac{x_n}{2}$.

Soit $m \in [\![n, N]\!]$ tel que $x_m = \max(x_n, ..., x_N)$. Alors $x_m \geq x_n$ donc pour tout $k \geq N$, $x_m \geq x_k$. Finalement, $x_m = \max\{x_k, k \geq n\}$.

• On revient à la question posée. Supposons que l'ensemble des n tels que $x_n = \max\{x_k, k \geq n\}$ est fini. Soit P le plus grand entier tel que $x_P = \max\{x_n, n \geq P\}$.

On a $x_P > 0$. Comme $x_n \to 0$, il existe P' tel que si $n \geq P'$, alors $0 < x_n \leq \frac{x_P}{2}$. Soit $\ell \geq P'$ tel que $x_\ell = \max\{x_k, k \geq P'\}$. On a alors $x_\ell = \max\{x_k, k \geq \ell\}$ et $x_\ell \leq \frac{x_P}{2}$. Or, si $n \leq P$, on a $\max\{x_k, k \geq n\} \geq x_P$ donc on a $\ell > P$. Cela contredit la définition de P.

6.28 1470-IMT-MP (MPSI)

On définit, pour x réel, $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. **Discuter la continuité de f.**
2. **Tracer le graphe de f.**
3. **On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).**

1. • Si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $\lfloor . \rfloor$ est continue en x_0 et ainsi, f aussi.

• Si $x_0 \in \mathbb{Z}$.

  • On a, lorsque $x \to x_0^+$, $\lfloor x \rfloor \to x_0$ et ainsi, $f(x) \to x_0$ i.e. $f(x) \to f(x_0)$.

  • Lorsque $x \to x_0^-$, on a $\lfloor x \rfloor \to x_0 - 1$ donc $f(x) \to x_0 - 1 + 1^2$ i.e. $f(x) \to f(x_0)$.

  Finalement, f est continue en x_0.

2.

3. • Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) - x = -(x - \lfloor x \rfloor) + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \leq 0$ car $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1]$. Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n \leq 0$ donc (x_n) **est décroissante.**

• Notons $k = \lfloor x_0 \rfloor$. On a $f(k) = k$ et $f(k+1) = k+1$ car k et $k+1$ sont des entiers. Ainsi, par croissance de f, $f([k, k+1]) \subset [k, k+1]$. Comme $x_0 \in [k, k+1]$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [k, k+1]$. Ainsi, (x_n) **est minorée par** k.

• D'après le théorème de la limite monotone, (x_n) converge. On note ℓ sa limite. On a : $\ell \in [k, x_0] \subset [k, k+1[$ et $f(\ell) = \ell$.

Or, si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $f(\alpha) - \alpha < 0$ donc nécessairement, $\ell \in \mathbb{Z}$. Finalement, $\ell = k$.

6.29 1472-IMT-MP (MPSI)

Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$

On note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$

• Supposons que $\alpha > 1$. On a alors $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ et comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV, on a $\sum |u_n|$ CV donc $\sum u_n$ CVA et ainsi, $\sum u_n$ CV.

• Supposons que $\alpha \in]0, 1]$. On a $\frac{1}{n^{2\alpha}} \to 0$ donc

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}} + +o(\frac{1}{n^{2\alpha}})\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{1}{n^{3\alpha}} + o(\frac{1}{n^{3\alpha}})}_{v_n} \end{aligned}$$

Selon le critère spécial relatif aux séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV.

On a $v_n \sim \frac{-1}{2} \frac{1}{n^{3\alpha}} \leq 0$ donc $\sum v_n$ et $\sum \frac{1}{n^{3\alpha}}$ sont de même nature.

- Si $\alpha > 1/3$: on a $\sum v_n$ CV, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV donc $\sum u_n$ CV.
- Si $\alpha \in]0, 1/3]$: on a $\sum v_n$ DV, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV donc $\sum u_n$ DV.

6.30 1473-IMT-MP (MPSI)

Nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$?

C'est l'exercice 46 de la banque CCINP MP.

$$\begin{aligned}
\pi\sqrt{n^2+n+1} &= \pi n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \pi n\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{8}\frac{1}{n^2}+O(\frac{1}{n^3})\right) \\
&= \pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) &= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8}\frac{1}{n}+\underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{v_n}
\end{aligned}$$

Or, selon le critère spécial relatif aux séries alternés, $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{3\pi}{8}\dfrac{1}{n}$ CV.

Et, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV, $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ et $v_n = O(1/n^2)$ donc $\sum v_n$ CV.

Finalement, $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ CV.

6.31 1474-IMT-MP (MPSI)

Nature de la série $\sum \cos\left(n^2\pi\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$?

$$\begin{aligned}
n^2\pi\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) &= n^2\pi\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= n^2\pi\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+O(1/n^4)\right) \\
&= -n\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3n}+O(1/n^2)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos\left(n^2\pi\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) &= (-1)^n\sin\left(-\frac{\pi}{3n}+O(1/n^2)\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}+\underbrace{O(1/n^2)}_{v_n}
\end{aligned}$$

Or, d'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}$ CV. Par ailleurs, $v_n = O(1/n^2)$ avec $1/n^2 \geq 0$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV donc $\sum v_n$ CV.

Finalement, $\sum \cos\left(n^2\pi\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$ CV.

6.32 1475-IMT-MP (MPSI)

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. **Montrer que (u_n) converge vers 0 .**
2. **Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)$ converge vers une limite non nulle.**
3. **Déterminer un équivalent de u_n. Quelle est la nature de $\sum u_n$?**

1. • On a $\sin([0,\frac{\pi}{2}]) = [0,1] \subset [0,\frac{\pi}{2}]$ Ainsi, comme $u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

• La fonction $f : x \in [0,\frac{\pi}{2}] \mapsto \sin x - x$ est dérivable et sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x) < 0$. f est donc strictement décroissante. Comme $f(0) = 0$, on a $f \leq 0$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Cela montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin u_n - u_n \leq 0$$

i.e. (u_n) est décroissante.

• (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$, par continuité de f, on a $f(\ell) = 0$. D'après l'étude de f, on a donc $\ell = 0$. Finalement, $u_n \to 0$.

2. On va utiliser que $u_n \to 0$ et qu'ainsi, $\sin u_n \sim u_n$ d'une part et $\sin u_n - u_n \sim -\frac{u_n^3}{6}$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} \\
&= \frac{(u_n + u_{n+1})(u_n - u_{n+1})}{u_n^2 u_{2n+1}} \\
&\sim \frac{2u_n \frac{u_n^3}{6}}{u_n^4} \\
&\sim \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3. D'après le lemme de Cesaro,

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right)}{n} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

i.e.

$$\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

ce qui donne

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

On a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV et $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ donc $\sum u_n$ DV.

6.33 1476-IMT-MP

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

On a $u_n > 0$ et $\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Or,

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \underbrace{O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)}_{v_k}$$

Or, selon le critère spécial relatif aux séries alternées, on a $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ CV. On note S sa somme. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} = S + o(1)$$

De plus, $\sum \frac{1}{k}$ DV et

$$\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2k} = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

Enfin, $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$ CV et $\frac{1}{k\sqrt{k}} \geq 0$ donc $\sum v_k$ CV. On note S' sa somme. On a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = S' + o(1)$$

Finalement,

$$\ln u_n = -\frac{1}{2}\ln n + L + o(1)$$

où $L = S - \frac{\gamma}{2} + S'$.
On en déduit

$$u_n = \exp(-\frac{1}{2}\ln n + L + o(1)) \sim \frac{e^L}{\sqrt{n}}$$

Finalement, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV et est à termes positifs donc, par comparaison $\sum u_n$ DV.

6.34 1478-IMT-MP

On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t, v_n = (-1)^n u_n, w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$**, pour tout** $n \in \mathbb{N}$**.**

1. **Justifier l'existence de** u_0 **et** w_0**.**
2. **Déterminer les limites de** (u_n) **et de** (w_n)**.**
3. **Nature de** $\sum u_n, \sum v_n$ **et** $\sum w_n$ **?**

1. $t \in]0,\pi] \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue et admet une limite finie en 0 : elle est don bien intégrable sur $]0,\pi]$. Cela prouve l'existence de u_0. Et de même, on montre l'existence de w_0.
2. Montrons que ces suites tendent vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

   On a $\frac{\sin t}{t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$: il existe donc $T > 0$ tel que si $t \geq T$, alors $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq \varepsilon$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \lfloor \frac{T}{\pi} \rfloor + 1$, alors $n \geq \frac{T}{\pi}$ et ainsi, $n\pi \geq T$ donc

$$\begin{aligned}\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{f(t)}{t} dt\right| &\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \\ &\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \varepsilon dt \\ &\leq \varepsilon\pi\end{aligned}$$

   On a bien prouvé que $u_n \to 0$. De même, on obtient $w_n \to 0$.
3. • $\sum u_n$ CV : commençons par montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ CV. Pour cela, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos t$. Alors, uv a bien une limite finie en $+\infty$ et ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$. Or, cette intégrale est convergente car $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive et intégrable en $+\infty$.

   De plus, on sait que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ CV donc finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ CV.

   Soit maintenant, $N \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ qui a bien une limite finie lorsque $N \to +\infty$.

   • $\sum v_n$ DV. On a $v_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

   D'où $v_n \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} dt$ et finalement

$$v_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt$$

Or, par π-périodicité de $|\sin|$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|dt$ ne dépend pas de n. Notons α cette valeur.

On a donc

$$v_n \geq \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{n+1}$$

Or, $\sum \frac{1}{n+1}$ est à termes positifs et est DV. On conclut par comparaison que $\sum v_n$ DV.

- $\sum w_n$ CV : on a pour $n \geq 1$

$$0 \leq w_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{t^2}dt \leq \frac{\pi}{n^2\pi^2}$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et est CV. Par comparaison, $\sum w_n$ CV.

6.35 1480-IMT-MP (MPSI)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.

1. **Étudier les variations de f et tracer son graphe.**
2. **Donner un équivalent de f en 0 .**

1. On note $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{(1+t^4)^2}$.

- g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{4x} g(t)dt$ est bien définie.

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

- Notons G une primitive de g. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(4x) - G(x)$. f est donc dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4G'(4x) - G'(x)$$

ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{4}{(1+4^4x^4)^2} - \frac{1}{(1+x^4)^2}$$

- Étudions le signe de $f'(x)$. Or, soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\iff \quad \frac{1}{(1+x^4)^2} \leq \frac{4}{(1+4^4x^4)^2} \\ &\iff \quad 1+4^4x^4 \leq 2(1+x^4) \\ &\iff \quad 254x^4 \leq 1 \end{aligned}$$

Notons $a = \sqrt[4]{\dfrac{1}{254}}$.

On a

x	$-\infty$	$-a$	a	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

2. On a

$$f(x) = \int_x^{4x} 1dt + \int_x^{4x} \frac{1}{(1+t^4)^2} - 1dt$$

On a $\displaystyle\int_x^{4x} 1dt = 3x$. Montrons qu'au voisinage de 0, $\displaystyle\int_x^{4x} \frac{1}{(1+t^4)^2} - 1dt = o(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\dfrac{1}{(1+t^4)^2} - 1 \to 0$ lorsque $t \to 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t| \leq \delta$, $\left|\dfrac{1}{(1+t^4)^2} - 1\right| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq \dfrac{\delta}{4}$. Alors, pour tout $t \in [x, 4x]$ (ou $t \in [4x, x]$), on a $\left|\dfrac{1}{(1+t^4)^2} - 1\right| \leq \varepsilon$ et donc

$$\left|\int_x^{4x} \frac{1}{(1+t^4)^2} - 1dt\right| \leq 3|x|\varepsilon$$

Finalement,

$$f(x) \sim_{x\to 0} 3x$$

Remarque : on peut aussi utiliser l'intégration des relations de comparaison : $\dfrac{1}{(1+t^4)^2} \sim 1 \geq 0$ lorsque $t \to 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^2}dt$ converge. Par propriété, on a donc

$$\int_0^a \frac{1}{(1+t^4)^2}dt \sim \int_0^a 1dt$$

Ainsi,

$$\int_0^{4x} \frac{1}{(1+t^4)^2}dt \sim 4x$$

$$\int_0^{x} \frac{1}{(1+t^4)^2}dt \sim x$$

donc

$$f(x) = 4x + o(x) - (x + o(x)) = 3x + o(x) \sim 3x$$

6.36 1481-IMT-MP

Soit $f : x \in [-1/3, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$**. Étudier** f **et donner son graphe.**

On note $g : t \in]-1, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ (qui est continue) et G une primitive de g.

- - Si $x > -\dfrac{1}{3}$, alors $3x > -1$ donc $[x, 3x] \subset]-1, +\infty$. Ainsi, $\displaystyle\int_x^{3x} g(t)dt$ a bien un sens.
  - Si $x = -\dfrac{1}{3}$, alors $]3x, x] =]-1, -\dfrac{1}{3}]$. On a $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$ donc, au voisinage de -1, $t^3+1 \sim 3(t+1)$ et ainsi

    $$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

    Or, $t > -1 \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$ est intégrable en -1 et positive. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^{-1/3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ converge et f est bien définie en $-1/3$.
- On a pour $x > -1/3$, $f(x) = G(3x) - G(x)$. Donc f est dérivable sur $]-1/3, +\infty[$ et pour tout $x > -1/3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3G'(3x) - G'(x) \\ &= 3g(3x) - g(x) \\ &= \frac{3}{\sqrt{1+27x^3}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \end{aligned}$$

- Étudions le signe de $f'(x)$: soit $x > -1/3$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff 3\sqrt{1+t^3} \geq \sqrt{1+27t^3} \\ &\iff 8 \geq 18t^3 \\ &\iff \frac{4}{9} \geq t^3 \\ &\iff \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \geq t \end{aligned}$$

- Ainsi, f est croissante que $[-\dfrac{1}{3}, \sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}]$ et décroissante sur $[\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}, +\infty[$.
- Montrons que lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &\leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^{3/2}}dt \\ &\leq [\frac{-2}{t^{1/2}}]_x^{3x} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{3x}} \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc, par encadrement, $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

6.37 1482-IMT-MP

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. **Montrer que f est bien définie.**
2. **Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1]$.**
3. **Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0 .**

1. On a $g : t > 0 \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ continue et admet une limite finie en 0 (1). On note toujours g la fonction ainsi prolongée. Pour $x \in [0,1]$, g est continue sur $[0, x^2]$ et ainsi, $f(x)$ est bien définie.
2. Soit G une primitive de g, par exemple, celle qui s'annule en 0. On a pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = G(x^2)$. Par composition, f est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $f'(x) = 2xg(x^2)$ i.e.
$$\forall x \in]0,1], f'(x) = 2\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$
et
$$f'(0) = 0$$
3. On a $\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1 + o(1)$ lorsque $t \to 0$. Par primitivation, $G(x) = G(0) + x + o(x)$ et finalement,
$$f(x) = x^2 + o(x^2)$$

6.38 1483-IMT-MP

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{3+\cos^2 u}$. Calculer $\phi(x)$.
Ind. Utiliser le changement de variable $v = \tan u$.

- Comme ϕ est impaire, on se contente de faire le calcul dans le cas $x > 0$.
- On commence par calculer, pour $x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, $\displaystyle\int_{-\pi/2}^x \frac{du}{3+\cos^2 u}$. On pose $v = \tan u$.

  On obtient une intégrale impropre convergente (car de même nature que l'intégrale initiale)
$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^x \frac{du}{3+\cos^2 u} &= \int_{-\infty}^{\tan x} \frac{1}{3+\frac{1}{1+v^2}}\frac{1}{1+v^2}dv \\
&= \int_{-\infty}^{\tan x} \frac{1}{4+3v^2}dv \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\tan x} \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)^2}dv \\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)]_{-\infty}^{\tan x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right) + \frac{\pi}{4\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

  Notons que ce raisonnement est valable pour $x = \dfrac{\pi}{2}$: il suffit de remplacer $\tan x$ par $+\infty$ et on obtient ainsi
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3+\cos^2 u}du = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$
  et de même,
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3+\cos^2 u}du = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$
- Selon le même calcul, on obtient pour $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$,
$$\int_0^x \frac{du}{3+\cos^2 u} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)$$

- Soit $x \geq \dfrac{\pi}{2}$. On a $u \mapsto \dfrac{1}{3+\cos^2 u}$ est π-périodique. Ainsi, pour tout ℓ entier, $\displaystyle\int_{\ell\pi-\frac{\pi}{2}}^{\ell\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{du}{3+\cos^2 u} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3+\cos^2 u} du = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Soit k le plus grand entier (éventuellement nul) tel que $k\pi + \dfrac{\pi}{2} \leq x$ ($k = \lfloor \dfrac{x}{\pi} - \dfrac{1}{2} \rfloor$). On a alors par CHASLES

$$\int_0^x \frac{du}{3+\cos^2 u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{3+\cos^2 u} + \sum_{j=1}^{k} \int_{j\pi-\frac{\pi}{2}}^{j\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos^2 u} du + \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{du}{3+\cos^2 u}$$

ie

$$\int_0^x \frac{du}{3+\cos^2 u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{3+\cos^2 u} + k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos^2 u} du + \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{du}{3+\cos^2 u}$$

soit

$$\int_0^x \frac{du}{3+\cos^2 u} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}(2k+1) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x-(k+1)k\pi} \frac{du}{3+\cos^2 u}$$

et finalement,

$$\int_0^x \frac{du}{3+\cos^2 u} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}(2k+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)$$

si $x - k\pi \neq \dfrac{\pi}{2}$ et sinon :

$$\int_0^x \frac{du}{3+\cos^2 u} = \frac{\pi(k-1)}{2\sqrt{3}}$$

6.39 1485-IMT-MP

On considère la suite (u_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = id$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$.

1. **Étudier la convergence simple de (u_n).**
2. **La convergence est-elle uniforme ?**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la convergence de la suite $(u_n(x))$.
   - Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors $(u_n(x))$ est constante égale à x.
   - Sinon, soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]k\pi, (k+1)\pi[$. L'intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ est stable par $f = \sin + id$: en effet, f est croissante, $f(k\pi) = k\pi$ et $f((k+1)\pi) = (k+1)\pi$.

     Ainsi :
     - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \in]k\pi, (k+1)\pi[$ et en particulier $(u_n(x))$ est bornée,
     - $(u_n(x))$ est monotone (par croissance de f) et précisément, si k est pair, on a, pour $t \in]k\pi, (k+1)\pi[$, $f(t) \geq t$ donc $(u_n(x))$ est croissante. Si k est impair, de même, la suite est décroissante.
     - la suite $(u_n(x))$ est donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\sin \ell = 0$. Si k est pair, on a $\ell = (k+1)\pi$ et si k est impair, on a $\ell = k\pi$.

     Finalement, (u_n) converge simplement vers la fonction : $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \in]2k\pi, 2k\pi + 2\pi[& \mapsto & (2k+1)\pi \\ 2k\pi & \mapsto & 2k\pi \end{array}$.
2. La limite de (u_n) n'est pas continue alors que les (u_n) le sont. La convergence n'est donc pas uniforme.

6.40 1491-IMT-MP

Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(x^3)}{x\sqrt{x}}$.

1. **Montrer que f admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.**
2. **Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f\left(\dfrac{n}{x}\right) f(xn)$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.**

1. Au voisinage de 0, on a $\sin(x^3) = O(x^3)$ et donc $f(x) = O(x^{3/2})$ et ainsi, $f(x) = o(x)$. Ceci est un $DL_1(0)$.

   On en déduit qu'en posant $f(0) = 0$ (on note toujours f la fonction ainsi prolongée), f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   De plus, f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Il reste donc à montrer la continuité de f' en 0.

   Or, pour $x > 0$,
$$f'(x) = 3\sqrt{x}\cos(x^3) - \frac{3}{2}\frac{\sin(x^3)}{x^2\sqrt{x}}$$
   et donc $f'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

   Finalement, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $x > 0$. On a $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{x}\sin\left(\frac{n^3}{x^3}\right)}{n\sqrt{n}} \dfrac{\sin(n^3x^3)}{x\sqrt{x}n\sqrt{n}}$ soit
$$f_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n^3}{x^3}\right)\sin(n^3x^3)}{n^3}$$
   Ainsi, f_n est bornée et
$$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leq \frac{1}{n^3}$$
   Comme $\sum \dfrac{1}{n^3}$ CV, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$ et ainsi, $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.41 1492-IMT-MP

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. **Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.**
2. **Montrer que : $\forall x \in [0,1], 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)x$.**
3. **La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est sa limite en $+\infty$?**
4. **Dresser le tableau de variation de f.**

1.
   - f est définie sur $\mathbb{R}^+$: soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a $0 \leq \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{1+n^2}$ CV. Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ CV.
   - f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$: on applique le théorème de dérivation des séries de fonctions. Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x > 0 \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.
     - $\sum f_n$ CVS vers f sur $\mathbb{R}_+^*$
     - pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on a
$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^k \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$
     - soit $k \in \mathbb{N}$ et $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ est bornée sur $[a,b]$ et $||f_n^{(k)}||_{\infty,[a,b]} = \dfrac{n^k e^{-na}}{1+n^2}$. Comme $\dfrac{n^k e^{-na}}{1+n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on a $\sum ||f_n^{(k)}||_{\infty,[a,b]}$ convergente. Finalement, $\sum f_n^{(k)}$ CVU sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

       On conclut que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k n^k \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

2. On utilise que la fonction $g : x \mapsto 1 - \exp(-x)$ est concave (elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = -e^{-x} \leq 0$. La droite passant par $(0, g(0))$ et $(1, g(1))$ a pour équation cartésienne $y = \left(1 - \dfrac{1}{e}\right)x$. C'est donc une corde de la courbe représentative de g et on a bien pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geq \left(1 - \dfrac{1}{e}\right)x$.

3. • f n'est pas dérivable en 0 : soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$: on a $nx \leq 1$ ssi $n \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

   On a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-e^{-nx}}{x(1+n^2)} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1-e^{-nx}}{x(1+n^2)} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{(1-\frac{1}{e})n}{1+n^2} \\
&\geq \left(1-\frac{1}{e}\right) \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{n}{1+n^2}
\end{aligned}$$

   Or, $\frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum \frac{n}{1+n^2}$ est une série à termes positifs divergente. On a donc, lorsque $x \to 0$,

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{n}{1+n^2} \to +\infty$$

   et ainsi

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| \to +\infty$$

   On conclut que f n'est pas dérivable en 0.

   • f tend vers 1 en $+\infty$: on utilise le théorème de la double limite.
     • Comme cela a été vu dans la question 1, $\sum f_n$ CVU sur $[1,+\infty[$
     • pour $n \geq 1$, lorsque $x \to +\infty$, $f_n(x) \to 0$ et d'autre part, $f_0(x) \to 1$. D'après le théorème de la double limite, $\sum \lim_{+\infty} f_n$ CV et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$$

4. f est une somme de série de fonctions décroissantes, elle est donc décroissante. On a déjà déterminé sa limite en $+\infty$ qui est 0.

6.42 1501-IMT-MP

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3} dt$ pour $n \geq 1$.

1. **Montrer que I_n est définie.**
2. **Déterminer $\lim I_n$.**
3. **Nature de la série $\sum I_n$.**

1. 0 n'est pas une borne impropre puisque $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3}$ est continue. De plus, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+n^4t^3}$ qui est intégrable en $+\infty$: f_n est donc bien intégrable en $+\infty$.
2. Posons $u = n^{4/3}t$. On a $I_n = \frac{1}{n^{4/3}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(un^{-1/3})}{1+u^2} du$ donc $I_n = O(\frac{1}{n^{4/3}})$. On conclut que $I_n \to 0$ et que $\sum I_n$ converge.
3. Fait précédemment.

6.43 1505-IMT-MP

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx) \mathrm{d}t$ par deux méthodes :

1. **à l'aide d'un développement en série entière de la fonction cosinus ;**
2. **à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1.**

1. Ici, on développe $\cos(tx)$ en série entière puis on intervertit $\sum$ et $\int$ en utilisant le théorème d'intégration terme à terme. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

   - D'après le cours, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(tx) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(tx)^{2k}}{(2k)!}$ et ainsi,

   $$e^{-t^2}\cos(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^k e^{-t^2}\frac{(tx)^{2k}}{(2k)!}}_{f_k(t)}$$

   - On applique le théorème d'intégration terme à terme :
     - $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $h : t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$
     - les f_k sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$
     - h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$
     - $\sum \int_0^{+\infty} |f_k|$ CV : en effet, pour $k \in \mathbb{N}$, notons $I_k = \int_0^{+\infty} t^{2k}e^{-t^2}$. C'est une intégrale convergente : $t \mapsto t^{2k}e^{-t^2}$ est continue, en $+\infty$, on a $t^{2k}e^{-t^2} = o(1/t^2)$ avec $1/t^2 \geq 0$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ CV, en 0, $t^{2k}e^{-t^2} \to 0$.
     De plus, en remarquant qu'on a $t^{2k+2}e^{-t^2} = t^{2k+1}.te^{-t^2}$, et en faisant une intégration par parties (qui est bien possible puisque les $t^p e^{-t^2}$ tendent vers 0 en $+\infty$) :

     $$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2}I_k$$

     De là, on obtient, pour $k \in \mathbb{K}$,

     $$I_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}I_0$$

     Cela prouve l'intégrabilité des f_k et donne

     $$\int_0^{+\infty} |f_k(t)|dt = \frac{x^{2k}}{2^{2k}k!}I_0$$

     Enfin, $\sum \frac{x^{2k}}{2^{2k}k!}$ est bien CV (série usuelle et dont la somme est $e^{x^2/4}$).
     Finalement, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et obtenir

     $$\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}k!}I_0$$

     ie

     $$\phi(x) = e^{-x^2/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. Ici, on va appliquer le théorème de dérivation sous $\int$ pour expliciter ϕ'. Pour cela, on note $f : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-t^2}\cos(tx)dt$

   - Pour $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - Pour $x \in \mathbb{R}$:
     - $t > 0 \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable (ce qui valide au passage la bonne définition de ϕ) : $|f(x,t)| \leq e^{-t^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}$ CV
     - $t > 0 \mapsto -te^{-t^2}\sin(xt)$ est continue par morceaux
   - Si $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $|-te^{-t^2}\sin(xt)| \leq te^{-t^2}$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- On conclut que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2}\sin(tx)dt$$

Il s'agit maintenant de déterminer une équation différentielle vérifiée par ϕ. Pour cela, on réalise une intégration par parties dans l'expression précédente. Cela est bien possible car $e^{-t^2}\sin(xt)$ a une limite finie (en t), en 0 et en $+\infty$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = -\frac{x}{2}\phi(x)$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \lambda e^{-x^2/4}$.

Or, $\lambda = \phi(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = e^{-x^2/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

6.44 1506-IMT-MP

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)}\mathrm{d}t$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$. En déduire F.

L'énoncé demande bien de montrer la continuité puis le caractère $\mathcal{C}^1$. Pour cela, on utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre puis le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Remarquons déjà qu'on a pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|\arctan(u)| \leq |u|$$

- F est continue :
  - Pour $t > 0$, $x \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue
  - Pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0 \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque

    $$\forall t > 0, \left|\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{|x|}{1+t^2}$$

    avec $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

    Notons au passage qu'on vient de justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
  - Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. On a pour $(x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}_+^*$, on a

    $$\left|\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{a}{1+t^2}$$

  On peut bien appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre et conclure sur F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de classe $\mathcal{C}^1$:
  - Pour $t > 0$, $x \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$
  - Pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0 \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue par morceaux et intégrable (déjà fait)
  - Pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0 \mapsto \dfrac{1}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux
  - Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Pour $(x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}_+^*$,

    $$\left|\frac{1}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

  (avec $t > 0 \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$)

  D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}dt$$

- Cherchons maintenant à expliciter F' puis F. F étant impaire, on prend $x \geq 0$. A l'aide d'une décomposition en éléments simples, on obtient pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)} = \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2t^2}$$

Ainsi, $F'(x) = \left[\frac{1}{1-x^2}\arctan(t) - \frac{x}{1-x^2}\arctan(xt)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}$

Comme F' est continue, la formule précédente est valable pour $x = 1$.

Enfin, il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) + K$. Comme $F(0) = 0$, on a $K = 0$.

Finalement

$$\forall x \geq 0, F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

$$\forall x \leq 0, F(x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x)$$

6.45 1510-IMT-MP

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

1. **Donner le domaine de définition de F.**
2. **Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.**
3. **Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)$ est continue.

   - On a, en 0, $\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt) \sim 1$ et 1 est positif et intégrable en 0.
   - Pour $t \geq 1$, on a

   $$\left|\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)\right| \leq \frac{e^{-t}}{t}$$

   et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable en $+\infty$.

   Finalement, F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On va appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

   - Soit $t > 0$. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$.
     - $t > 0 \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
     - $t > 0 \mapsto (e^{-2t} - e^{-t})\sin(xt)$ est continue.
   - Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, $|(e^{-2t} - e^{-t})\sin(xt)| \leq e^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On conclut que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty}(e^{-2t} - e^{-t})\sin(xt)dt$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty}(e^{-2t} - e^{-t})e^{ixt}dt$ converge car pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|(e^{-2t} - e^{-t}||e^{ixt}| \leq e^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On a de plus $F'(x) = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}(e^{-2t} - e^{-t})e^{ixt}dt\right)$.

   On a

   $$\begin{aligned}
   \int_0^{+\infty}(e^{-2t} - e^{-t})e^{ixt}dt &= \int_0^{+\infty} e^{t(-2+ix)} - e^{t(-1+ix)}dt \\
   &= \left[\frac{e^{t(-2+ix)}}{-2+ix} - \frac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix}\right]_0^{+\infty} \\
   &= \frac{1}{-1+ix} - \frac{1}{-2+ix} \\
   &= \frac{-1-ix}{1+x^2} - \frac{-2-ix}{4+x^2}
   \end{aligned}$$

   Finalement,

   $$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{4+x^2}$$

Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(4+x^2) + K.$$

On a $F(0) = \ln 2 + K$. Or, $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$

Soit $X > 0$.

$$\int_0^X \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt = \int_0^X \frac{e^{-2t} - 1}{t} dt - \int_0^X \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$$

Cette écriture est bien possible puisque $t \mapsto \dfrac{e^{-2t} - 1}{t} \sim -2$ en 0 et est donc intégrable en 0.

On pose $u = 2t$ dans la première intégrale et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt &= \int_0^{2X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du - \int_0^X \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \\
&= \int_X^{2X} \frac{e^{-u} - 1}{u} du \\
&= \int_X^{2X} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_X^{2X} \frac{du}{u} \\
&= \int_X^{2X} \frac{e^{-u}}{u} du - \ln 2
\end{aligned}$$

Or, pour $X \geq 1$, $0 \leq \displaystyle\int_X^{2X} \frac{e^{-u}}{u} du \leq \underbrace{\int_X^{2X} e^{-u} du}_{e^{-X} - e^{-2X} \to 0}$. Finalement, $F(0) = \ln 2$ et $K = 0$.

On conclut

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(4+x^2)$$

6.46 1512-IMT-MP

On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

1. **Donner le domaine de définition de f.**
2. **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.**
3. **Exprimer f''.**
4. **En déduire des expressions de f' et f avec des fonctions usuelles.**

1. f est définie sur $\mathbb{R}$: soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonctions $t > 0 \mapsto \dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$ est continue. On étudie l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$.
   - On a, lorsque $t \to 0$, $\dfrac{1 - \cos(xt)}{t} e^{-t} \sim \dfrac{x^2}{2}$ qui est constante et donc intégrable au voisinage de 0, ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$ converge.
   - De plus, pour $t \geq 1$, $\left| \dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} \right| \leq 2e^{-t}$ qui est positive et intégrable en $+\infty$. Finalement, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$ converge.
2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :
   - Pour $t > 0$, $x \mapsto \dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
     - $t > 0 \mapsto \dfrac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$
     - $t > 0 \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (en effet, en 0, $\dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \sim x$ qui est constante d'où l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$, pour $t \geq 1$, $|\dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t}| \leq e^{-t}$ qui est positive et intégrable en $+\infty$).

- $t > 0 \mapsto \cos(xt)e^{-t}$ est continue.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $|\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t}$ avec $t \mapsto e^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt$ converge puisque pour tout $t > 0$, $|e^{ixt}e^{-t}| \leq e^{-t}$ qui est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f''(x) = \mathrm{Re}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt$.

   Finalement,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

4. Puis, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \arctan(x) + K$. Comme $f'(0) = 0$, on a $K = 0$. Ainsi

$$f' = \arctan$$

.

   Par intégration par parties, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

   Comme $f(0) = 0$, on a $C = 0$ et ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

6.47 1515-IMT-MP

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k}$**.**

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n : u \in]0,1[\mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{4k}$. On applique le théorème de convergence dominée

- (S_n) CVS vers $S : u \in]0,1[\mapsto \dfrac{1}{1+u^4}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est continue par morceaux
- S est continue par morceaux
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$, $|S_n(t)| = \left|\dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{4n+4}}{1+t^4}\right| \leq \dfrac{2}{1+t^4}$ avec $t \in]0,1[\mapsto \dfrac{2}{1+t^4}$ intégrable.

On conclut qu'on a

$$\lim \int_0^1 S_n(t)dt = \int_0^1 \lim S_n(t)dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+1}$ donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^4}$$

6.48 1516-IMT-MP

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ \mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $\sum u_n$. Calculer sa somme.

- On peut prouver la convergence et déterminer la somme en même temps via le théorème de convergence dominée. Mais, si on souhaite prouver cette convergence avant, on peut appliquer le critère spécial relatif aux séries alternées. En effet, en notant $W_n = \int_0^1 \cos^n t dt$ (intégrale de WALLIS), on sait que (W_n) est positive, décroissante et tend vers 0. Ainsi, $\sum(-1)^n W_n$ CV.
- Pour calculer la somme (et éventuellement prouver la convergence de la série), on applique le théorème de convergence dominée : pour cela, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \pi/2[$: $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cos^k t$. On a alors :

  - (S_n) CVS vers $S : t \in]0, \pi/2[\mapsto \dfrac{1}{1+\cos t}$
  - Les S_n sont continues par morceaux
  - S est continue par morceaux
  - Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a $|S_n(t)| = \left|\dfrac{1-(-1)^{n+1}\cos^{n+1}(t)}{1+\cos t}\right| \leq \dfrac{2}{1+\cos t}$ avec $t \in]0, \pi/2[\mapsto \dfrac{2}{1+\cos t}$ intégrable

  On conclut qu'on a

$$\lim \int_0^{\pi/2} S_n(t)dt = \int_0^{\pi/2} \lim S_n(t)dt$$

  Or, $\int_0^{\pi/2} S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n} u_k$ donc finalement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos t}dt$$

  Or,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos t}dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}dt \\ &= [\tan \frac{t}{2}]_0^{\pi/2} \\ &= 1\end{aligned}$$

6.49 1517-IMT-MP

Soit $I = \int_0^1 \dfrac{\arctan\left(t^2\right)}{t}\ \mathrm{d}t$

1. **Montrer que I est bien définie.**
2. **Montrer que $I = -2\int_0^1 \dfrac{t\ln(t)}{1+t^4}\ \mathrm{d}t$**
3. **Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.**

1. La fonction $f : t \in]0, 1] \mapsto \dfrac{\arctan(t^2)}{t}$ est continue et en 0, on a $f(t) \sim t$ donc f a une limite finie en 0 ce qui prouve l'existence de I.
2. On réalise une intégration par parties : on pose, pour $t \in]0, 1]$, $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \arctan(t^2)$. Alors, en 0, $u(t)v(t) \sim t^2 \ln t \to 0$. Ainsi,d'après le théorème de l'intégration par parties, $\int_0^1 \dfrac{t\ln t}{1+t^4}dt$ converge et

$$I = \underbrace{[uv]_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{2t\ln t}{1+t^4}dt$$

3. D'après le critère spécial relatif aux séries alternées, cette série est bien convergente.

De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{2n} dt$.

En utilisant le théorème de convergence dominée, on va permuter la limite et l'intégrale. Pour cela, on pose $S_n : t \in]0,1[\mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$. On a :

- (S_n) CVS vers $S : t \in]0,1[\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$
- Les S_n sont continue par morceaux
- S est continue par morceaux
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$, $|S_n(t)| = \left| \dfrac{1+(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} \right| \leq \dfrac{2}{1+t^2}$ avec $t \in]0,1[\mapsto \dfrac{2}{1+t^2}$ intégrable sur $]0,1[$.

On conclut qu'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

6.50 1520-IMT-MP

Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\, \mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

Posons $f_k : x > 0 \mapsto \dfrac{(-1)^k}{1+k^2t^2}$ et $S_n : t > 0 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(t)$. Pour $t > 0$ fixé, lorsque $k \to +\infty$, on a $\left|\dfrac{(-1)^k}{1+k^2t^2}\right| \sim \dfrac{1}{k^2t^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}$ étant absoument convergente, elle est convergente et on note $S : t > 0 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2t^2}$.

On applique le théorème de convergence dominée :

- (S_n) converge simplement vers S
- Les S_n et S sont continues. Pour la continuité de S, celle-ci découle du fait que $\sum f_k$ converge normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$: si $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a $||f_k||_{\infty,[a,b]} = \dfrac{1}{1+k^2a^2}$ qui est le terme général d'une série convergente.
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a,b]$, on a $|S_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, on sait que les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes et qu'on a

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq ... \leq S \leq ... \leq S_4 \leq S_2 \leq 0$$

et on a $S_1(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$.

Ainsi, le théorème de convergence dominée permet d'affirmer qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+n^2t^2}$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+n^2t^2} = \frac{1}{n}\left[\arctan(nt)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n}$ donc finalement,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

6.51 1522-IMT-MP (MPSI)

1. **Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f'(x) = e^{-x}$. Montrer que $f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.**
2. **Plus généralement, montrer que si $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.**

1. L'ensemble solution de l'équation homogène de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) + y'(x) = e^{-x}$$

est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

et une solution particulière est par exemple $x \mapsto xe^{-x}$.

Finalement, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x}$$

En particulier, $f \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. On procède de même : on note $h = f + f'$. f est solution de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) + y'(x) = h(x)$$

dont on cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante : soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$. g est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) + g'(x) = \lambda'(x)e^{-x}$$

On obtient donc une solution particulière de l'équation en posant

$$g(x) = e^{-x} \int_0^x h(t)e^t dt$$

Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\int_0^x h(t)e^t dt + a \right) e^{-x}$$

Pour conclure, il nous reste à montrer qu'on a

$$\int_0^x h(t)e^t dt e^{-x} \to 0$$

lorsque $x \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que si $x \geq A$, alors $|h(x)| \leq \varepsilon$. Pour $x \geq A$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x h(t)e^t dt e^{-x} \right| &= \left| \int_0^A h(t)e^t dt e^{-x} + \int_A^x h(t)e^t dt e^{-x} \right| \\
&\leq \left| \int_0^A h(t)e^t dt \right| e^{-x} + \left| \int_A^x h(t)e^t dt \right| e^{-x} \\
&\leq \underbrace{\left| \int_0^A h(t)e^t dt \right|}_{M} e^{-x} + \int_A^x \left| h(t)e^t \right| dt e^{-x} \\
&\leq Me^{-x} + \int_A^x \varepsilon e^t dt e^{-x} \\
&\leq Me^{-x} + \varepsilon \int_A^x e^t dt e^{-x} \\
&\leq Me^{-x} + \varepsilon
\end{aligned}$$

Or, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que si $x \geq B$, on ait $e^{-x} \leq \varepsilon$.

Ainsi, si $x \geq \max(A, B)$, $\left| \int_0^x h(t)e^t dt e^{-x} \right| \leq (M+1)\varepsilon$ ce qui montre bien que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

6.52 1523-IMT-MP

On recherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (1) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1 + x.$$

1. **Trouver toutes les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .**
2. **Montrer que, si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(E) : y'' + y = 0$.**
3. **Résoudre (E).**
4. **Trouver toutes les solutions de (1).**

1. On procède par analyse/synthèse.

Analyse : soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R > 0$. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Pour $x \in]-R, R[$, on note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que g est solution de (1).

Soit $x \in]-R, R[$, par propriété des séries entières, $\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} g(x) + \int_0^x (x-t)g(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt - \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2} \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2} + \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}) x^n \end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture des séries entières, on a $a_0 = a_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+2} + \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} = 0$$

ie

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

Si $k \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

et

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

Finalement, $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

Synthèse : Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

Alors, les calculs de l'analyse montrent que g est bien solution de (1).

Finalement, il existe une unique solution à (1) qui est développable en série entière au voisinage de 0 : c'est $\sin + \cos$.

2. On suppose que f vérifie (1). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$: ainsi, par somme, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt - x f(x) + x f(x)$$

i.e.

$$f'(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt \quad (2)$$

Cela montre que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -f(x)$$

3. L'ensemble des solutions réelles de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x) + B\sin(x) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. D'après les questions 2 et 3, si f est solution de (1), alors, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Or, d'après (1), on a $f(0) = 1$ donc nécessairement $A = 1$ puis, d'après (2), $f'(0) = 1$ donc nécessairement, $B = 1$.

Finalement, si f est solution de (1), alors $f = \sin + \cos$.

Enfin, d'après la question 1, cette fonction est bien solution de (1).

Finalement, (1) admet une unique solution qui est $\cos + \sin$ et elle est développable en série entière en 0.

6.53 1525-IMT-MP

Soit (1) l'équation différentielle $xy' + y = \mathrm{e}^x$.

1. **Trouver les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .**
2. **Les solutions de** (1) **sur** $\mathbb{R}_+^*$ **sont-elles toute développable en série entière au voisinage de 0 ?**
3. **Résoudre (1) sur un intervalle** I **de** $\mathbb{R}$**. Discuter suivant** I**.**
4. **On ajoute à l'équation (1) la condition** $y(x_0) = y_0\,(\text{avec}\,x_0, y_0 \in \mathbb{R}\ )$ **pour obtenir un problème numéroté (2). Que dit le théorème de Cauchy à propos du problème (2) si on travaille sur** $]0, +\infty[$ **? Résoudre (2).**
5. **Représenter graphiquement la ou les solutions développables en série entière.**

1. On raisonne par analyse/synthèse :

Analyse : Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $R > 0$. On suppose que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$ et on note pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. f est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et

$$xf'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_n x^n$$

Rappelons qu'on a pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ainsi, si f est solution de (1), on a, par unicité de l'écriture en série entière :

$$a_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_n = \frac{1}{n!}$$

Ainsi, on obtient pour $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

Synthèse : La série entière $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ d'après d'Alembert et selon les calculs précédents, pour tout $x > 0$, $xf'(x) + f(x) = e^x$.

On remarque que $f(0) = 1$ et que pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

2. D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble solution de (1) est un sous-espace affine de dimension 1. Or, l'ensemble des solutions DSE en 0 est un singleton : il existe donc des solutions de (1) qui ne sont pas DSE en 0.
3. Si $I \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$, sur $I \cap \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble solution de l'équation homogène est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I \cap \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{A}{x} \end{array}, A \in \mathbb{R} \right\}$$

On utilise maintenant la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière de (1). Soit $\lambda : I \cap \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : x \in I \cap \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in I \cap \mathbb{R}_+^*$,

$$xf'(x) + f(x) = \lambda'(x)$$

Ainsi, pour que f soit solution de (1), il suffit de choisir $\lambda = \exp$.

Finalement, l'ensemble solution sur $I \cap \mathbb{R}_+^*$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I \cap \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{A + e^x}{x} \end{array}, A \in \mathbb{R} \right\}$$

On trouve le même ensemble sur $I \cap \mathbb{R}_+^*$ (s'il est non vide).

Si $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$, on a terminé. Sinon, si f est solution de (1) sur I, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x > 0 & \mapsto & \dfrac{e^x + A}{x} \\ x < 0 & \mapsto & \dfrac{e^x + B}{x} \\ 0 & \mapsto & ? \end{array}$$

Comme f est continue en 0, on a nécessairement, $A = B = -1$. Finalement, on retrouve la fonction de la question 1 qui est bien solution de (1).

Remarque : on peut aussi résoudre l'équation ainsi : pour $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note $g : x \mapsto xf(x)$. On a alors que f est solution de (1) ssi pour tout $x \in I$, $g'(x) = e^x$ ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = e^x + A$ i.e. pour $x \in I \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{e^x + A}{x}$.

4. Le théorème de Cauchy linéaire nous assure l'existence et l'unicité d'une solution ϕ. On sait qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $\phi(x) = \dfrac{e^x + A}{x}$ et comme $\phi(x_0) = y_0$, on a $A = x_0 y_0 - e^{x_0}$.
5.

6.54 1530-IMT-MP

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance de X de trois manières différentes :

1. **directement à partir de la loi de X ;**
2. **en utilisant la fonction génératrice de X ;**
3. **sans calcul, en interprétant la loi de X.**

1.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^(1-p)^{n-1-k} \\ &= np \end{aligned}$$

2. On a, pour $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (1-p+pt)^n$. G_X est dérivable en 1 et $G_X'(1) = np$. Cela prouve que X admet une espérance (on le savait déjà puisque X est finie) et qu'on a $E(X) = np$.
3. Soit X_1,...,X_n n var iid $\sim \mathcal{B}(p)$. Alors X et $X_1 + ... + X_n$ ont la même loi et donc la même espérance. Or, $E(X_1) = p$ et ainsi par linéarité de l'espérance, on obtient $E(X) = np$.

6.55 1532-IMT-MP

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant une espérance. On suppose que $f(X)$ admet une espérance. Montrer que l'on a $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.

- Si X est finie : notons $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$. On a, d'après la formule de transfert, $E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) P(X = x_k)$.

  Or, les $P(X = x_k)$ sont des réels positifs de somme 1. D'après l'inégalité de convexité, on a donc

  $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) P(X = x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)\right)$$

  ce qui est bien $E(f(X)) \geq f(E(X))$.

- Si X est discrète non finie. Notons $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $\lambda_N = 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P(X = x_k)$. On note aussi $a \in I$

  D'après l'inégalité de convexité,

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)P(X = x_k) + f(a)\lambda_N \geq f\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k P(X = x_k) + a\lambda_N\right)$$

  Il reste à faire $N \to +\infty$:

  - On a $\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)P(X = x_k) \to \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)P(X = x_k)$ car $f(X)$ admet une espérance.
  - On a $\lambda_N \to 0$ car $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = x_k) = 1$ donc $f(a)\lambda_N \to 0$
  - On a de même, $\sum_{k=0}^{N-1} x_k P(X = x_k) + a\lambda_N \to \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k)$
  - et par continuité de f, $f\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k P(X = x_k) + a\lambda_N\right) \to f\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k)\right)$

  Finalement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)P(X = x_k) \geq f\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k)\right)$$

  ce qui est bien $E(f(X)) \geq f(E(X))$.

6.56 1533-IMT-MP

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On pose $S = X + Y$.

1. **Donner G_S en fonction de G_X et de G_Y.**
2. **On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$. Loi de S ?**
3. **On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Loi de S ?**

1. Soit $t \in [0, 1]$. t^X et t^Y sont indépendantes donc $E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$ et ainsi, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.
2. Soit $t \in [0, 1]$. On a $G_X(t) = (1-p+pt)^n$ et $G_Y(t) = (1-p+pt)^m$. Ainsi, $G_S(t) = (1-p+pt)^{m+n}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une loi $\mathcal{B}(n+m, p)$. La fonction génératrice caractérisant la loi, on a $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m, p)$.
3. On procède de même : on a $G_X(t) = e^{\lambda_1(t-1)}$ et $G_Y(t) = e^{\lambda_2(t-1)}$ donc $G_S(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$. Ainsi, $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

6.57 1534-IMT-MP

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$. Loi de $Z = X + Y$?

On a $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

Soit $k \geq 2$. On a

$$(Z = k) = \bigsqcup_{i=1}^{k-1} (X = i, Y = k - i)$$

donc

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i, Y=k-i) \\
&= \sum_{i=1} P(X=i)P(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3} . \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-1} \frac{1}{3} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3}^i \frac{2}{3}^{k-i} \\
&= \frac{1}{3^k} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-i} \\
&= \frac{1}{3^k} \sum_{i=1}^{k-1} 2^i \\
&= \frac{2}{3^k}(2^{k-1}-1)
\end{aligned}$$

6.58 1536-IMT-MP

On considère n tulipes qui ont chaque année chacune une probabilité $p \in]0,1[$ de fleurir, sachant que si une tulipe fleurit une année, elle fleurira toutes les années suivantes. La variable X_i désigne l'année de la première floraison de la tulipe numéro i, X l'année à partir de laquelle toutes les tulipes fleurissent.

1. **Exprimer X en fonction des $(X_i)_{i \leqslant n}$.**
2. **Exprimer la loi des $(X_i)_{i \leqslant n}$.**
3. **Calculer, pour $k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X > k)$. Montrer que X est d'espérance finie et déterminer un équivalent de cette espérance lorsque $n \to +\infty$.**

1. On note $X = \max(X_1, ..., X_n)$
2. On reconnaît la loi géométrique de paramètre p.
3. On a, par indépendance des X_i :

$$\begin{aligned}
P(X > k) &= 1 - P(X \leq k) \\
&= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq k)\right) \\
&= 1 - (P(X_1 \leq k))^n \\
&= 1 - (1 - P(X_1 > k))^n \\
&= 1 - (1-(1-p)^k)^n
\end{aligned}$$

X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on s'intéresse à $\sum_k 1-(1-q^k)^n$. Or, lorsque $k \to +\infty$, $q^k \to 0$ donc $1-(1-q^k)^n \sim nq^k$ qui est positif et le terme général d'une série convergente. Ainsi, X est d'espérance finie et

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1-(1-q^k)^n$$

Pour en déterminer un équivalent, on fait une comparaison série/intégrale. Soit $f : x > 0 \mapsto 1-(1-q^x)^n = 1-(1-e^{x \ln q})^n$. Par composition, f est décroissante. On a donc pour $k \geq 1$

$$\int_{k-1}^{k} f(t)dt \geq f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

et ainsi

$$1 + \int_0^{+\infty} f(t)dt \geq E(X) \geq \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

Dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$, on pose $u = 1 - q^x$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)dt &= -\frac{1}{\ln q}\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}du \\
&= -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 u^k du \\
&= -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} \\
&\sim -\frac{\ln n}{\ln q}
\end{aligned}$$

6.59 1539-IMT-MP

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géometriques de paramètres respectifs p et q. On note $Z = \dfrac{X}{Y}$.

1. **Montrer que $Z \leqslant X$. Montrer que Z admet une espérance et une variance. Calculer $\mathbf{E}(Z)$**
2. **Donner la loi de Z.**

1. On a $Y \geq 1$ et X positive donc $\dfrac{X}{Y} \leq X$. Finalement, $0 \leq Z \leq X$. Comme $X \in L^1$, on a $Z \in L^1$. D'après la formule de transfert et par indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{i}{j}P(X=i, Y=j) \\
&= \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{i}{j}(1-p)^{i-1}p(1-q)^{j-1}q
\end{aligned}$$

Par Fubini, on a ensuite

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j}(1-q)^{j-1}pq\sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j}pq(1-q)^{j-1}\frac{1}{p^2} \text{ (série géométrique derivée)} \\
&= \frac{q}{p(1-q)}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j}(1-q)^j \\
&= \frac{-q\ln q}{p(1-p)}
\end{aligned}$$

2. Soit $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. On note note sous forme irréductible, $q = \dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a $\dfrac{i}{j} = \dfrac{a}{b}$ ssi il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $i = ka$ et $j = kb$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
P(Z = \frac{a}{b}) &= P(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}(X = ka, Y = kb)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka, Y = kb) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka)P(Y = kb) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{ka-1}p(1-q)^{kb-1}q \\
&= pq(1-p)^{a-1}(1-q)^{b-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)^a\right)^{k-1}\left((1-q)^b\right)^{k-1} \\
&= \frac{pq(1-p)^{a-1}(1-q)^{b-1}}{1-((1-p)^a(1-q)^b}
\end{aligned}$$

7 CCINP

7.1 1386 MP-Niveau MPSI

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1,0,1\}$. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines. On note également $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j$ et $\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

1. **Montrer que $\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i^2\right)$, puis que $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.**
2. **Quelles sont les valeurs possibles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$?**
3. **Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3$.**
4. **Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1,0,1\}$.**

1. Comme $P(0) \neq 0$, les x_i sont tous non nuls. ln est concave donc, par inégalité de convexité, on a bien $\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^2)$. Puis, en passant à exp, on obtient bien $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
2. On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. D'après les relations coefficients/racines, on a $\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\sigma 2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}$ et $\sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.
   On sait que $a_n = 1$ et que les a_i sont dans $\{-1,0,1\}$. On a donc $\sigma_1 \in \{-1,0,1\}$, $\sigma_2 \in \{-1,0,1\}$ et $\sigma_n \in \{-1,1\}$ (0 n'est pas possible car les x_i sont tous non nuls).
3. On a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \leq 3$.
4. D'après la question 1, $\left(\underbrace{\sigma_n^2}_{=1}\right)^{1/n} \leq \frac{3}{n}$ donc $n \leq 3$. Ainsi, $P \in \{X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0, (a_2, a_1) \in \{-1,0,1\}^2$ et $a_0 \in \{-1,1\}\}$.

   Réciproquement : on teste tous les polynômes trouvés et selon les cas, pour conclure, il peut y avoir des factorisations simples, des racines évidentes ou bien des études de fonctions polynomiales.
   - $X^3 - 1$ (a pour racine j), $X^3 + 1$ (a pour racine $-j$), $X^3 + X^2 + X + 1$ (a pour racine i), $X^3 - X^2 + X - 1$ (i est racine) ne conviennent pas (non scindé sur $\mathbb{R}$)
   - $X^3 + X + 1$, $X^3 - X + 1$, $X^3 + X^2 + X - 1$, $X^3 + X^2 - X + 1$,$X^3 + X^2 + 1$, $X^3 + X^2 - 1$, $X^3 - X^2 + X + 1$, $X^3 - X^2 - X - 1$, $X^3 - X^2 + 1$, $X^3 - X^2 - 1$, $X^3 + X - 1$,$X^3 - X - 1$ ne conviennent pas (par étude de la fonction polynomiale, ces polynômes ont une unique racine réelle qui est simple et ne sont donc pas scindés sur $\mathbb{R}$)
   - $X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1)$ convient, $X^3 + X^2 - X - 1 = (X+1)^2(X-1)$ convient.

7.2 1410-CCINP-MP

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$ et $u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$.

1. **(MPSI) Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.**
2. **(MPSI) Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P.**
3. **Montrer que u est diagonalisable et donner ses vecteurs propres.**

1. OK pour la linéarité. Montrons que si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $u(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. On a directement : $\deg u(P) \leq n+1$.
   Notons α le coefficient de X^n dans P. Le coefficient de X^{n+1} dans $u(P)$ est $n\alpha - n\alpha$ i.e. 0. Ainsi, $u(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

2. Notons $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ les racines (distinctes) de P et $m_1,\ldots,m_k$ leurs ordres de multiplicités respectifs. Soit enfin λ le coefficient dominant de P.

   On a $P = \lambda \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{m_i}$, $P' = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_i (X-\alpha_i)^{m_i-1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (X-\alpha_j)^{m_j}$ et ainsi

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X-\alpha_i}$$

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et P vecteur propre associé unitaire. On a $(X-a)(X-b)P' - nXP = \lambda P$ donc $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{nX+\lambda}{(X-a)(X-b)}$.

   Par décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{nX+\lambda}{(X-a)(X-b)} = \dfrac{\frac{na+\lambda}{a-b}}{X-a} + \dfrac{\frac{nb+\lambda}{b-a}}{X-b}$.

   Par unicité de la décomposition en éléments simples, on obtient que a et b sont les seules racines de P. Ainsi, P est de la forme $P = (X-a)^c(X-b)^d$.

   Mais alors $u(P) = (X-a)(X-b)(X-a)^{c-1}(X-b)^{d-1}(c(X-b)+d(X-a)) - nX(X-a)^c(X-b)^d$ i.e.

$$u(P) = (X-a)^c(X-b)^d\left((c+d-n)X - cb - da\right)$$

   et ainsi, $c+d-n=0$.

   Réciproquement, si $P = (X-a)^c(X-b)^{n-c}$, alors $u(P) = (-cb-da)P$ donc P est vecteur propre (pour la valeur propre $\lambda_c = -n + c(a-b)$).

   u a donc n valeurs propres distinctes : u est diagonalisable. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, Le sous-espace propre E_{λ_k} est de dimension 1 et engendré par $(X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

7.3 1414-CCINP-MP

1. (MPSI) Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**. Déterminer** $\chi_A(0)$**,** $\lim\limits_{+\infty} \chi_A$ **et** $\lim\limits_{-\infty} \chi_A$**.**

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **vérifiant** $A^3 = A + I_n$**. Montrer que** $\det A > 0$**.**

1. On étudie $h : t \mapsto t^3 - t - 1$:

$$\begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
t & -\infty & & -\frac{1}{\sqrt{3}} & & \frac{1}{\sqrt{3}} & & +\infty \\
\hline
 & & & <0 & & & & +\infty \\
h & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & -\infty & & & & <0 & & \\
\hline
\end{array}$$

   Ainsi, h admet une unique racine réelle $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   Comme $\deg X^3 - X - 1 = 3$, il existe $(b,c) \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^2$ tels que les racines de $X^2 - X - 1$ soit a, b et c. Enfin, comme les coefficients de $X^3 - X - 1$ sont réels, on a $c = \overline{b}$.

2. Comme χ_A est unitaire, on a $\lim\limits_{+\infty} \chi_A = +\infty$. Si n est pair, on a $\lim\limits_{-\infty} \chi_A = +\infty$ et si n est impair, on a $\lim\limits_{+\infty} \chi_A = -\infty$.

   $\chi_A(0) = (-1)^n \det A$.

3. Passons dans $\mathbb{C}$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{a,b,c\}$.

   Notons, m_a, m_b et m_c leurs ordres respectifs. On a $\det A = a^{m_a} b^{m_b} c^{m_c}$ Comme A est à coefficients réels, χ_A est à coefficients réels donc on a $m_b = m_c$.

   Finalement, $\det A = a^{m_a} b^{m_b} c^{m_c} = a^{m_a} |b|^{2m_b} > 0$.

7.4 1418-CCINP-MP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **vérifiant** $A^2 + A^T = I_n$**.**

1. Justifier que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}\, M = \mathrm{Sp}\, M^T$**.**

2. Montrer que A **est inversible si et seulement si** $1 \notin \mathrm{Sp} A$**.**

3. Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ **est annulateur de** A**. La matrice** A **est-elle diagonalisable ?**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\det((\lambda I_n - M)^T) = \det(\lambda I_n - M)$ donc $\det(\lambda I_n - M^T) = \det(\lambda I_n - M)$. Ainsi, M et M^T ont même polynôme caractéristique et donc le même spectre.
2. • Supposons que A est inversible. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = X$. Alors, $A^2X + A^TX = X$ donc $A^TX = 0$. Or, A est inversible, donc A^T aussi et ainsi, $X = 0$. Finalement, 1 n'est pas valeur propre.
   Autre proposition : supposons A inversible, alors A^T l'est aussi. Or, $A^T = I_n - A^2 = (I_n - A)(I_n + A)$ donc $I_n - A$ est inversible et 1 n'est donc pas valeur propre de A.
   • Supposons que 1 n'est valeur propre de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$. Alors, $A^TX = X$. Comme 1 n'est pas valeur propre de A^T, on a $X = 0$ et finalement, A est inversible.
3. • On a $A^T = I_n - A^2$ ce qui donne $A = I_n - \left(A^T\right)^2$ puis, $A = I_n - (I_n - A^2)^2$ et finalement, $A^4 - 2A^2 + A = 0$.
   • $X^4 - 2X^2 + X = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X^2 + X - 1) = X(X-1)(X - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2})(X + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2})$. Ce polynôme est annulateur de A et est simplement scindé : A est donc diagonalisable.

7.5 1427-CCINP-MP

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M)I_n$.

1. **Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
2. **Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?**
3. **Trouver une base des sous-espaces propres de ϕ.**
4. **Déterminer $\mathrm{tr}\,\phi$ et $\det\phi$.**
5. **L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, déterminer ϕ^{-1}.**

1. ϕ va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\phi(\lambda M + N) = \lambda M + N + \underbrace{\mathrm{tr}(\lambda M + N)}_{\lambda \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)} I_n = \lambda\phi(M) + \phi(N)$.
2. • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $\phi(M) = M$ ssi $\mathrm{tr}(M) = 0$.
   Ainsi, 1 est valeur propre de ϕ et la dimension de E_1 est $n^2 - 1$: en effet, E_1 est le noyau de tr qui est une forme linéaire non nulle.
   • On a $\phi(I_n) = (n+1)I_n$ donc $n+1$ est valeur propre et E_{n+1} est de dimension ≥ 1.
   Mais, $E_1 \oplus E_{n+1}$ donc $\dim E_{n+1} \leq 1$. Finalement, $\dim E_{n+1} = 1$.
   On conclut que ϕ est diagonalisable puis la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n^2.
3. • E_{n+1} a pour base (I_n).
   • E_1 a pour base $(E_{1,1} - E_{i,i})_{2 \leq i \leq n}$.
4. • On a $\mathrm{tr}(\phi) = (n^2 - 1) \times 1 + 1 \times (n+1)$ donc $\mathrm{tr}(\phi) = n^2 + n$.
   • On a $\det\phi = 1^{n^2-1}(n+1)^1 = n+1$.
5. $0 \notin \mathrm{Sp}(\phi)$ donc ϕ est inversible.
   Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que $M + \mathrm{tr}(M)I_n = N$. Alors, en passant à la trace, on obtient $(n+1)\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N)$.
   Finalement
   $$M = N - \frac{1}{n+1}\mathrm{tr}(N)I_n$$
   i.e. $\phi^{-1}(N) = N - \dfrac{1}{n+1}\mathrm{tr}(N)I_n$.

7.6 1428-Navale-MP

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM$.

1. **Décrire les éléments propres de ϕ.**
2. **Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que ϕ soit diagonalisable.**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. Supposons qu'on a $\phi(M) = \lambda M$. Alors $AM = \lambda M$. Donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $AMX = \lambda MX$. Comme M n'est pas nulle, il existe X tel que $MX \neq 0$. On en déduit que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et que pour tout X, $MX \in E_{A,\lambda}$ c'est-à-dire $\mathrm{Im}(M) \subset E_{A,\lambda}$. Ainsi
$$\mathrm{Sp}(\phi) \subset \mathrm{Sp}(A)$$
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Soit $M \neq 0$ telle que $\mathrm{Im}(M) \subset E_{A,\lambda}$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $MX \in E_{A,\lambda}$ et ainsi, $AMX = \lambda MX$ et comme cela est vrai pour tout X, on a $AM = \lambda M$.
Finalement,
$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\phi)$$
Et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a $E_{\phi,\lambda} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Im}(M) \subset E_{1,\lambda}\}$.
2. On montre que ϕ est diagonalisable ssi A est diagonalisable. En effet, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a $\dim E_{\phi,\lambda} = \dim \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, E_{A,\lambda}) = n. \dim E_{A,\lambda}$.
Ainsi, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_{\phi,\lambda} = n. \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_{A,\lambda}$.
On a donc $n^2 = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_{\phi,\lambda}$ ssi $n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_{A,\lambda}$.

7.7 1430-CCINP-MP

Soient $a \in \mathbb{R}^*, U = \left(a^{j-i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à U.

1. **Déterminer le rang de u et son déterminant.**
2. **Déterminer la dimension du noyau de u ainsi qu'une équation de ce noyau.**
3. **Déterminer la dimension de l'image de u et une base de cette image.**
4. **Étudier la diagonalisabilité de u.**
5. **Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer U^k en fonction de U.**
6. **Déterminer le polynôme minimal de u et retrouver le résultat de la question précédente.**

1. Notons $C = \begin{pmatrix} 1 \\ a^{-1} \\ a^{-2} \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$. On a
$$U = \begin{pmatrix} C & aC & a^2C & \dots & a^{n-1}C \end{pmatrix}$$
Le rang de u est donc au plus 1 (toutes les colonnes sont colinéaires à la première) et au moins 1 car la première colonne est non nulle. Finalement,
$$\mathrm{rg}(u) = 1 \text{ et } \det u = 0$$
2. Selon le théorème du rang, $\dim \ker u = n - 1$. De plus, soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a
$$\begin{aligned} x \in \ker u &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} C & aC & a^2C & \dots & a^{n-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1C + ax_2X + \dots + a^{n-1}x_nC = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 + ax_2 + \dots + a^{n-1}x_n = 0 \end{aligned}$$
Ceci est une équation de $\ker u$.
3. On a vu dans la question que la dimension de l'image de u est 1 et que celle-ci est engendrée par $(1, a^{-1}, \dots, a^{n-1})$.
4.
   - 0 est valeur propre de multiplicité $\geq n - 1$ et $\dim E_0 = \dim \ker u = n - 1$.

- En s'aidant de la trace, on obtient que n est valeur propre de u et on voit par ailleurs qu'on a $UC = nC$. On a, $\dim E_n \geq 1$.
- Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a $\underbrace{\dim E_0}_{\geq n-1} + \underbrace{\dim E_n}_{\geq 1} \leq n$ donc nécessairement, $\dim E_0 = n-1$ et $\dim E_n = 1$.
- Comme $\dim E_0 + \dim E_n = n$, u est diagonalisable.

5. Notons $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$. On a $U = CC'^T$ donc

$$\begin{aligned} U^k &= C\underbrace{C'^T C}_{=S}\underbrace{C'^T C}_{=S} \ldots . C^T \\ &= S^{k-1}U \end{aligned}$$

avec $S = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Finalement,

$$U = n^{k-1}U$$

6. Comme u est diagonalisable, son polynôme minimal est $\mu_u = X(X-n)$. Afin de calculer u^k, on effectue la division euclidienne de X^k par μ_u. Il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X^k = \mu_u Q_k \alpha_k X + \beta_k$$

En évaluant cette égalité en 0, on obtient

$$\beta_k = 0$$

puis en évaluant cette égalité en n, on obtient

$$\alpha_k = n^{k-1}$$

Ainsi,

$$X^k = Q\mu_u + n^{k-1}X$$

En évaluant cette égalité en U, on obtient $U^k = n^{k-1}U$.

7.8 1431-IMT-MP

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

1. **Montrer que M admet une unique valeur propre de la forme $ik\pi$. Préciser k.**
2. **Montrer que M est triangulaire supérieure.**
3. **Déterminer les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\exp(M) = A$.**

Remarque : l'objectif ici est de résoudre l'équation $\exp(M) = A$ d'inconnue M. Les deux premières questions constituent "l'analyse" du raisonnement et la dernière question est "la synthèse".

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Il existe alors $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. Et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n X = \lambda^n X$ et finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{M^n X}_{\lambda^n X} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} X$$

et finalement, $\exp(M)X = e^\lambda X$.

On obtient que e^λ est valeur propre de A. Or, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$ donc $e^\lambda = -1$. Finalement, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (2\ell + 1)i\pi$.

On a donc

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{(2k\ell 1)i\pi, \ell \in \mathbb{Z}\}$$

De plus, A n'est pas diagonalisable car si elle l'était, comme $\mathrm{Sp}(A = \{-1\}$, on aurait A semblable à $-I_n$ et ainsi, $A = -I_n$ ce qui n'est pas le cas. M n'est donc pas diagonalisable non plus et a donc une unique valeur propre. Finalement, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\mathrm{Sp}(M) = \{(2\ell+1)i\pi\}$$

2. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ de M. On a $Mv = \lambda v$ et donc $\exp(M)v = e^{\lambda}v$ donc v est vecteur propre de A donc $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, la première colonne de M est $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$. M est donc triangulaire supérieure.

3. Dans les deux premières questions, on a vu que si $\exp(M) = A$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ impair et $c \in \mathbb{C}$ tels que, en posant $\lambda = e^{ik\pi}$, on ait $M = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1}c \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$
(peut se deviner en calculant M^2, M^3,... puis se prouver par récurrence).

   On a ainsi $\exp(M) = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\lambda^{n-1}c}{n!} \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix}$. Or, $e^{\lambda} = -1$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\lambda^{n-1}c}{n!} = c\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = ce^{\lambda} = -c$.

   Finalement,
$$\exp(M) = \begin{pmatrix} -1 & -c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Et on conclut que $\exp(M) = A$ ssi $c = -1$.
$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} (2\ell+1)i\pi & -1 \\ 0 & (2\ell+1)i\pi \end{pmatrix}, \ell \in \mathbb{Z} \right\}$$

7.9 1432-IMT-MP (MPSI)

Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]\backslash\{0\}$.

1. **Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur. Donner son noyau et son image.**
2. **On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur orthogonal.**

1.
   - Linéarité : soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $(Q_1, Q_2, R_1, R_2) \in \mathbb{R}[X]^4$ tels que $P_1 = AQ_1 + R_1$, $P_2 = AQ_2 + R_2$, $\deg R_1 < \deg A$, $\deg R_2 < \deg A$. On a alors
$$\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda Q_1 + Q_2) + \underbrace{(\lambda R_1 + R_2)}_{\deg < \deg A}$$
     Par unicité de la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par A, le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par A est $\lambda R_1 + R_2$.

     Finalement, $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.
   - Projecteur : on vérifie que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$. Or, si on considère $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dont on note R le reste de la division euclidienne de P par A, alors, on a aussi $R = A.0 + R$ qui est l'écriture de la division euclidienne de R par A. Ainsi, $f(R) = R$ c'est-à-dire, $f \circ f(P) = f(P)$.
   - Le noyau de f est l'ensemble des polynômes P dont le reste de la division euclidienne par A est 0. C'est l'ensemble des polynômes divisibles par A.
$$\ker f = A\mathbb{R}_{n-p}[X]$$
     où $p = \deg A$.

- L'image de f est $\mathbb{R}_{p-1}[X]$. En effet, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg f(P) <\geq A$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
  Réciproquement, si $R \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, alors on a $f(R) = R$ donc $R \in \mathrm{Im}(f)$. Finalement,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$$

2. On cherche donc une condition pour avoir $A\mathbb{R}_{n-p}[X] \perp \mathbb{R}_{p-1}[X]$ c'est-à-dire pour avoir

$$\forall (S,T) \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-p}[X], \int_0^1 AST = 0$$

Alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 AX^k = 0$ puisque si $k \leq p-1$, on peut écrire $X^k = \underbrace{X^k}_{\in \mathbb{R}_{p-1}[X]} . \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}_{n-p}[X]}$ et si $k \geq p$, alors $X^k = \underbrace{X^{p-1}}_{\in \mathbb{R}_{p-1}[X]} \underbrace{X^{k-p+1}}_{\in \mathbb{R}_{n-p}[X]}$.

On en déduit qu'on a $A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

Réciproquement, si $A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$, alors pour tout $(S,T) \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-p}[X]$, on a $\displaystyle\int_0^1 AST = 0$ puisque $ST \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

7.10 1433-St Cyr-MP (MPSI)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs telle que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \|f_k - e_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. **Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.**
2. **Montrer que le résultat précédent serait en défaut en remplaçant l'inégalité stricte par une inégalité large.**

1. Il suffit de prouver la liberté de la famille. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{\imath=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_E$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - e_i) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On passe aux normes et on utilise que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthonormée :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = || \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - e_i) ||^2$$

Or, par inégalité triangulaire, $\displaystyle || \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - e_i) || \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \underbrace{||f_i - e_i||}_{< \frac{1}{\sqrt{n}}}$ ainsi, si au moins l'un des λ_i est non nul, alors $\displaystyle || \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - e_i) || < \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 < \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \right)^2$$

Or, selon Cauchy-Scwharz,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

Finalement,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

c'est absurde !

Ainsi, tous les λ_i sont nulls.

2. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique. Posons : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et $f_2 = f_1$. Alors, (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $||f_1 - e_1|| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $||f_2 - e_2|| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Et (f_1, f_2) n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

7.11 1436-CCINP-MP

Soient $(E, (.|.))$ un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|v\| \leqslant 1$.

1. **Montrer que $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Im}(v - \mathrm{id}) = E$.**
   Ind. Considérer l'application $t \mapsto \|x + ty\|^2 - \|v(x + ty)\|^2$.
2. **Soit, pour $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}, w_p(x) = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} v^k(x)$.**
   Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(w_p(x))$ converge. Déterminer sa limite.

1. Par le théorème du rang (E est de dimension finie), on a déjà $\dim \ker(v - Id_E) + \dim \operatorname{Im}(v - Id_E) = \dim E$. Montrons que $\ker(v - Id_E) \cap \operatorname{Im}(v - Id_E) = \{0_E\}$.
   Soit $y \in \ker(v - Id_E) \cap \operatorname{Im}(v - Id_E)$. On a existence de $x \in E$ tel que $y = v(x) - x$ et on a aussi $v(y) = y$.
   On note f l'application du sujet. Comme $||v|| \leq 1$, f est positive.
   Par bilinéarité du produit scalaire, on a pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (||y||^2 - ||v(y)||^2)t^2 + 2((x|y) - (v(x)|v(y))t + ||x||^2 - ||v(x)||^2$. f est donc polynomiale.
   Comme $v(y) = y$, f n'est pas de degré 2 et comme f est positive, elle est donc constante. Ainsi, le coefficient de t est nul ie $(x|y) - (v(x)|v(y)) = 0$ i.e. $(x - v(x)|y) = 0$ ce qui s'écrit enfin $(y|y) = 0$. On a bien montré que y est nul.
2. Soit $x \in E$, $(a, b) \in \ker(v - Id_E) \times \operatorname{Im}(v - Id_E)$ tel que $x = a + b$. Soit $c \in E$ tel que $b = v(c) - c$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $v^k(a) = a$ et $v^k(b) = v^{k+1}(c) - v^k(c)$. Ainsi, $w_p(x) = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \left(a + v^{k+1}(c) - v^k(c)\right) = a + \dfrac{1}{p+1}\left(v^{p+1}(c) - c\right)$.
   Mais, par inégalité triangulaire, $||v^{p+1}(c) - c|| \leq ||v^{p+1}(c)|| + ||c|| \leq 2||c||$ puisque $||v|| \leq 1$. Finalement, $\dfrac{1}{p+1}\left(v^{p+1}(c) - c\right) \to 0_E$ et $w_p(x) \to a$.

7.12 1443-CCINP-MP

Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs linéairement indépendants Soit $u : x \mapsto (b, x)a + (a, x)b$.

1. **Montrer que u est un endomorphisme symétrique.**
2. **Déterminer son noyau.**
3. **Déterminer les éléments propres de u.**

1. u est bien linéaire. De plus, soit $(x, y) \in E^2$. On a $(u(x)|y) = (b|x)(a|y) + (a|x)(b|y) = (x|u(y))$.
2. Soit $x \in \ker u$. On a $(x|b)a + (x|a)b = 0_E$ donc, comme (a, b) est libre, $(a|x) = (x|b) = 0$. Finalement
$$\ker u \subset \operatorname{Vect}(a, b)^\perp$$
   Réciproquement, si $x \in \operatorname{Vect}(a, b)^\perp$, alors $u(x) = 0_E$.
   Finalement,
$$\ker u = \operatorname{Vect}(a, b)^\perp$$
3. 0 est valeur propre de u et $E_0 = \ker u$ est de dimension $n - 2$ d'après le théorème du supplémentaire orthogonal. Comme u est diagonalisable dans une BON, les deux valeurs propres restantes sont à chercher dans
   $F = \operatorname{Vect}(a, b)$ (qui est bien stable par u). Étudions la restriction de u à F. Sa matrice dans (a, b) est M=$\begin{pmatrix} (b|a) & ||b||^2 \\ ||a||^2 & (a|b) \end{pmatrix}$ (elle est symétrique, c'est normal...). Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $u_{|F}$, on a, à l'aide

de la trace et du déterminant : $\lambda_1+\lambda_2=2(b|a)$ et $\lambda_1\lambda_2=(a|b)^2-||a||^2||b||^2$ d'où $\lambda_1=(a|b)-||a||.||b||$ et $\lambda_2=(a|b)+||a||.||b||$ conviennent.

Finalement
$$\mathrm{Sp}(u)=\{0,(a|b)-||a||.||b||,(a|b)+||a||.||b||\}$$

On a $M-((a|b)-||a||.||b||)I_2=\begin{pmatrix} ||a||.||b|| & ||b||^2 \\ ||a||^2 & ||a||.||b|| \end{pmatrix}$: donc
$$E_{(a|b)-||a||.||b||}=\mathrm{Vect}(||b||a-||a||b)$$

De même,
$$E_{(a|b)+||a||.||b||}=\mathrm{Vect}(||b||a+||a||b)$$

7.13 1444-CCINP-MP

Soit $A=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$**.**

1. **Calculer** A^TA**.**
2. **Sans utiliser** χ_A**, trouver les valeurs propres de** A **et les multiplicités associées.**
3. **Calculer** π_A **et** χ_A**.**
4. **Trouver** $P\in\mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ **telle que** P^TAP **soit diagonale.**
5. **Trouver le commutant de** A**.**

1. On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. A est une matrice orthogonale et symétrique. Ses valeurs propres sont donc réelles (théorème spectral) et de valeurs absolues égales à 1. En effet, munissons $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de la norme 2, considérons λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. On a $||Ax||=||x||$ donc $||\lambda x||=||x||$ et finalement, $|\lambda|=1$.

   Finalement, $\mathrm{Sp}(A)\subset\{-1,1\}$.

   Comme A est diagonalisable (théorème spectral), on n'a ni $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$ (car alors on aurait A semblable à I_4 et donc égale à I_4) ni $\mathrm{Sp}(A)=\{-1\}$.

   Finalement,
   $$\mathrm{Sp}(A)=\{-1,1\}$$

   Enfin, $A-I_n=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc, selon le théorème du rang, 1 est de multiplicité 3 et -1 de multiplicité 1.
3. On a $\pi_A=(X-1)(X+1)$ et $\chi_A=(X-1)^3(X+1)$.
4. On a $E_1=\mathrm{Vect}((x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, 2x-y-z-t=0\}$ dont on cherche une base orthonormée. On a déjà $(1,2,0,0)\in E_1$ ainsi que $(0,0,-1,1)$ et ces deux vecteurs sont orthogonaux. On cherche donc $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} 2a-b-c-d=0 \\ a+2b=0 \\ c-d=0 \end{cases}$. On choisit $(4,-2,5,5)$. Finalement, $((0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0,0),\frac{1}{\sqrt{70}}(4,-2,5,5))$ est une base orthonormée de E_1.

   On a $E_{-1}=\mathrm{Vect}(-2,1,1,1)=\mathrm{Vect}(\frac{1}{\sqrt{7}}(-2,1,1,1))$.

   Notons $\mathcal{B}=(\frac{1}{\sqrt{7}}(-2,1,1,1),(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0,0),\frac{1}{\sqrt{70}}(4,-2,5,5))$. P, la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ convient.

Finalement, $P = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{7}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{\sqrt{70}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{7}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{70}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{7}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{5}{\sqrt{70}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{7}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$ convient.

5. Soit a canoniquement associée à A, soit $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et b canoniquement associée à B.

   On a : $AB = BA$ ssi $a \circ b = b \circ a$ ce qui équivaut à $b(E_1) \subset E_1$ et $b(E_{-1}) \subset E_{-1}$.

   En effet, si $a \circ b = b \circ a$, selon le cours, les sous-espaces propres de a sont stables par b. Réciproquement, si $b(E_1) \subset E_1$ et $b(E_{-1}) \subset E_{-1}$, soit alors $x \in \mathbb{R}^4$ qu'on décompose $x = y + z$ avec $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$. On a $b(a(x)) = b(y - z) = b(y) - b(z)$ d'une part et d'autre part $a(b(x)) = a(b(y)) + a(b(z)) = b(y) - b(z)$ car $b(y) \in E_1$ et $b(z) \in E_{-1}$.

   Matriciellement, cela donne : b commute avec a ssi sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} B' & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & d \end{pmatrix}$ et donc ssi sa matrice dans la base canonique est de la forme $P \begin{pmatrix} B' & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & d \end{pmatrix} P^T$.

   Enfin, le commutant de A est $\left\{ P \begin{pmatrix} B' & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & d \end{pmatrix} P^T, B' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } d \in \mathbb{R} \right\}$.

7.14 1448-CCINP-MP

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les autres coefficients étant nuls. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. **Quel est le rang de A (MPSI) ?**
2. **Trouver les valeurs propres et sous-espaces propres de A.**
3. **Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'image de f pour la structure euclidienne canonique (MPSI).**

1. A est de rang 2 : en effet, les deux premières colonnes de A sont libres et engendrent toutes les colonnes de A.
2. Selon le théorème spectral, A est diagonalisable et d'après la question précédente 0 est valeur propre d'ordre $n-2$. E_0 a pour équations $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + ... + x_n = 0 \end{cases}$ et est engendré par

   $((0,1,-1,0,...,0), (0,1,-1,0,...,0), ..., (0,1,...,0,-1))$.

   $E_0^\perp$

   Comme f est diagonalisable dans une BON, il nous reste deux valeurs propres à trouver dans $E_0^\perp$.

   D'après les équations qui définissent E_0, on a $E_0^\perp = \text{Vect}(1,0,0,...,0), (0,1,1,1,...,1))$. Notons f_0 l'endomorphisme induit par f sur cet espace. Sa matrice dans la base précédente est $M = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Les deux valeurs propres restantes sont les racines de $(\lambda - 1)\lambda - n + 1 = 0$ i.e. $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$. Il s'agit donc de $\lambda_1 = \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$.

   On a $M - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & n-1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$: ainsi, $E_{\lambda_1} = \text{Vect}(\lambda_1(1,0,...,0) + 1.(0,1,...,1))$ et de même, $E_{\lambda_2} = \text{Vect}(\lambda_2(1,0,..,0) + 1.(0,1,...,1))$.
3. L'image de f est engendrée par $(1,1,...,1)$ et $(1,0,..,0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux mais $(0,1,...,1)$ et $(1,0,..,0)$ le sont.

   Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $p(x) = (x|(1,0,...,))(1,0,..,0) + \dfrac{1}{n-1}(x|(0,1,1,...,1))(0,1,...,1)$. Si on note $x = (x_1,...,x_n)$, cela donne $p(x) = x_1(1,0,...,0) + \dfrac{x_2 + ... + x_n}{n-1}(0,1,1,...,1)$.

On en déduit que la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n-1} & \dfrac{1}{n-1} & \dots & \dfrac{1}{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dfrac{1}{n-1} & \dfrac{1}{n-1} & \dots & \dfrac{1}{n-1} \end{pmatrix}$$

7.15 1449-CCINP-MP

Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, (.|.))$.

1. **Montrer que u et v commutent si et seulement si $u \circ v$ est autoadjoint.**
2. **Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs à u et v.**
3. **Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y + z = 0$. Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec s.**

1. Supposons que u et v commutent. Alors $(u \circ v)^* = (v \circ u)^* = u^* \circ v^* = u \circ v$. Ainsi, $u \circ v$ est autoadjoint.

   Supposons que $u \circ v$ est autoadjoint. Alors $(u \circ v)^* = u \circ v$ donc $v^* \circ u^* = u \circ v$ puis $v \circ u = u \circ v$ puisque u et v sont autoadjoints.
2. Supposons que u et v commutent. Soit λ une valeur propre de u. Comme u et v commutent, on a $v(E_\lambda) = E_\lambda$. Or, v est autoadjoint, donc $v_{|E_\lambda}$ aussi : selon le théorème spectral, il existe donc une BON $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ de vecteurs propres de v. En concaténant les $\mathcal{B}_\lambda$, on obtient une BON de vecteurs propres de u et de v.

   Réciproquement, supposons qu'il existe une BON de vecteurs propres de u et v. Dans cette base, u et v ont une matrice diagonale donc commutent.
3. D'après le cours, les symétries orthogonales sont autoadjointes. Soit s' une symétrie orthogonale.

   D'après la question 2, $s \circ s' = s' \circ s$ ssi s et s' possède une base commune orthonormée de vecteurs propres.

   Les bases orthonormées de vecteurs propres de s sont $((\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), f_1, f_2))$ avec (f_1, f_2) BON du plan P d'équation $x + y + z = 0$.

   Ainsi, s' commutent avec s ssi il existe (f_1, f_2) BON de P dans laquelle la matrice de s' est $\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

7.16 1451-CCINP-MP

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. **On suppose que $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$. L'endomorphisme u est-il nécessairement nul ?**
2. **Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :**
   - **i)** $u \circ u^* = u^* \circ u$,
   - **ii)** $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$,
   - **iii)** $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

1. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique.

   Soit $u : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (b, -a)$.

   Alors, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\langle u(a, b), (a, b)\rangle = \langle (b, -a), (a, b)\rangle = 0$. Et pourtant u n'est pas l'application nulle.
2. • *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* : supposons *iii)*, soit alors $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(||u(x) + u(y)||^2 - ||u(x) - u(y)||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||u(x + y)||^2 - ||u(x - y)||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||u^*(x + y)||^2 - ||u^*(x - y)||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||u(^*x) + u^*(y)||^2 - ||u^*(x) - u^*(y)||^2\right) \\ &= \langle u^*(x), u^*(y)\rangle \end{aligned}$$

- $ii) \Rightarrow i)$: supposons $ii)$. Soit $(x,y) \in E^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} \langle u \circ u^*(x), y\rangle &=& \langle u^*(x), u^*(y)\rangle \\ &=& \langle u(x), u(y)\rangle \\ &=& \langle u^* \circ u(x), y\rangle \end{array}$$

Ainsi, si on fixe x, alors pour tout $y \in E$, $\langle u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x), y\rangle = 0$.
On conclut que $u \circ u^*(x) - -u^* \circ u(x) \in E^{\perp}(= \{0_E\})$ et finalement on a $u^* \circ u(x) = u \circ u^*(x)$.

- $i) \Rightarrow iii)$: supposons $i)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{array}{rcl} ||u(x)||^2 &=& \langle u(x), u(x)\rangle \\ &=& \langle x, u^* \circ u(x)\rangle \\ &=& \langle x, u \circ u^*(x)\rangle \\ &=& \langle u^*(x), u^*(x)\rangle \\ &=& ||u^*(x)||^2 \end{array}$$

7.17 1453-St Cyr-MP

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, un espace euclidien et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de E. On note $G = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. **Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.**
2. **Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = A^T A$.**
3. **En déduire que le rang de G et égal à celui de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.**

1. Par symétrie du produit scalaire, G est bien une matrice symétrique réelle.

   Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $Y^T G Y = Y^T \begin{pmatrix} \langle x_1, \sum_{i=1}^n y_i x_i\rangle \\ \langle x_2, \sum_{i=1}^n y_i x_i\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, \sum_{i=1}^n y_i x_i\rangle \end{pmatrix} = \langle \sum_{i=1}^n y_i x_i, \sum_{i=1}^n y_i x_i\rangle \geq 0$. Ainsi, G est bien positive.
2. Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E. On note $A = Mat_{\mathcal{E}}(x_1, ..., x_n)$. Alors, $A^T A = G$.

   En effet, le coefficient (i,j) de $A^T A$ est $\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$. Or, les $(a_{k,i})_k$ sont les coordonnées de x_i dans la base $\mathcal{E}$ (qui est orthonormée) donc $\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \langle x_i, x_j\rangle$.
3. On a $\text{rg}(G) = \text{rg}(A^T A)$. Or,
$$\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A)$$
   en effet, on a
$$\ker A \subset \ker A^T A$$
   et réciproquement, si $X \in \ker A^T A$, alors $A^T A X = 0$ donc $X^T A^T \underbrace{AX}_{Y} = 0$ donc $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$ et finalement, $Y = 0$ ie $AX = 0$. On a montré : $X \in \ker A$.

   Par théorème du rang, $\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A)$ et comme A est la matrice de la famille $(x_1, ..., x_n)$ dans une base de E, son rang est celui de la famille $(x_1, ..., x_n)$.

   On a montré
$$\text{rg}(G) = \text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A) = \text{rg}(x_1, ..., x_,)$$

7.18 1457-St Cyr-MP

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ non restreint à la fonction nulle. On note I l'ensemble des rapports $\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$ quand f décrit F privé de la fonction nulle, où usuellement $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$.

1. **Que dire de I si F est de dimension 1 ?**
2. **Dans le cas général, montrer que I est un intervalle inclus dans $[1,+\infty[$.**
3. **On suppose F de dimension finie. Montrer que I est un segment.**

1. Si F est de dimension 1, soit g vecteur engendrant F. Alors $F = \{\lambda g, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   On a donc $I = \left\{ \dfrac{||\lambda g||_\infty}{||\lambda g||_2}, \lambda \in \mathbb{R}^* \right\} = \{1\}$, par homogénéité des normes.

2. • Si $f \in F$, on a $||f||_2^2 = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt \leq \int_0^1 ||f||_\infty^2 dt \leq ||f||_\infty^2$. Ainsi, $F \subset [1,+\infty[$.

   • Montrons que I est connexe par arcs et cela prouvera que c'est un intervalle. Si on munit F de $||.||_\infty$, l'application $||.||_2$ est continue (puisque 1-lipschitzienne), l'application $||.||_\infty$ est aussi continue donc, par quotient, $\psi : f \in F \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{||f||_\infty}{||f||_2}$ est continue.

   De plus, $F \setminus \{0\}$ est connexe par arcs (car de dimension ≥ 2) donc $\psi(F)$ est connexe par arcs et ainsi, I est connexe par arcs.

   Remarque : pour la connexité par arcs de $F \setminus \{0\}$: soit u et v deux fonctions de $F \setminus \{0\}$. Si (u,v) est libre alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tu + (1-t)v \neq 0$ et $t \mapsto tu + (1-t)v$ est un chemin continu à valeurs dans $F \setminus \{0\}$ joignant u à v.

   Si (u,v) est liée, soit w tel que (u,w) soit libre (cela existe car $\dim F \neq 1$), il existe alors un chemin continu joignant u à w puis un chemin continu joignant w à v.

3. Comme F est de dimension finie, toutes les normes définies sur F sont équivalentes. Il existe donc $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que, sur F, $m||.||_2 \leq ||.||_\infty \leq M||.||_2$. Ainsi, $I \subset (m,M]$. I est donc un intervalle borné.

   Il reste à montrer que I est fermé.

   Soit (α_n) une suite de I qui converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que $\alpha \in I$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in F$ telle que $\dfrac{||g_n||_\infty}{||g_n||_2} = \alpha_n$. Soit alors $f_n = \dfrac{g_n}{||g_n||_2}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{||f_n||_\infty}{||f_n||_2} = \alpha_n$ et la suite (f_n) est bornée (puisque de norme 2 constante égale à 1). Comme F est de dimension finie, on peut extraire de (f_n) une suite $(f_{\phi(n)})$ qui converge dans F. On note f sa limite. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||f_{\phi(n)}||_2 = 1$ donc, par continuité de $||.||_2$, $||f||_2 = 1$. On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||f_{\phi(n)}||_\infty = \alpha_{\phi(n)}$ et par continuité de $||.||_\infty$, $||f||_\infty = \alpha$.

   Finalement, $f \in F$ et $\dfrac{||f||_\infty}{||f||_2} = \alpha$. On a bien montré de $\alpha \in F$.

7.19 1462-CCINP-MP

On note $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$ d'écriture développée $P = \sum\limits_{k \geqslant 0} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup\limits_k |a_k|$.

1. **Montrer que $||.||$ est une norme de E.**

   Soit $b \in \mathbb{C}$, on souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.
2. **Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue.**
3. **Étudier la continuité de f si $|b| = 1$ en utilisant la suite de polynôme $(P_n)_{n \geqslant 0}$, où, pour $n \in \mathbb{N}, P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \bar{b}^k X^k$.**
4. **Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.**

1. - La suite des coefficients d'un polynôme est à support fini donc $\sup_k |a_k|$ existe bien et est en fait un max.
   - $||.||$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   - Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda P = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i X^i$. Alors $||\lambda P|| = \max_{0\le i\le n} |\lambda a_i| = |\lambda| \max_{0\le i\le n} |a_i|$ (propriété du cours sur les max/sup).
   - Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et si $||P|| = 0$ alors $\max_{0\le i\le n} |a_i| = 0$ donc pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $|a_i| = 0$ et finalement, $P = 0$.
   - Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, alors $||P+Q|| = \max_{0\le i\le n} |a_i + b_i|$. Or, pour $i \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{array}{rcl} |a_i + b_i| & \le & |a_i| + |b_i| \\ & \le & \max_{0\le i\le n} |a_i| + \max_{0\le i\le n} |b_i| \end{array}$$

   et ainsi, $\max_{0\le i\le n} |a_i + b_i| \le \max_{0\le i\le n} |a_i| + \max_{0\le i\le n} |b_i|$ ce qui donne bien $||P+Q|| \le ||P|| + ||Q||$.
2. Comme f est linéaire, pour montrer que f est continue, il suffit de montrer l'existence de K tel que pour tout $P \in E$, $|f(P)| \le K||P||$.

   Or, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors

$$\begin{array}{rcl} |f(P)| & = & \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b^k\right| \\ & \le & \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|a_k|}_{\le ||P||} |b^k| \\ & \le & ||P|| \sum_{k=0}^{n} |b|^k \\ & \le & ||P|| \dfrac{1-|b|^{n+1}}{1-|b|} \\ & \le & \dfrac{1}{1-|b|} ||P|| \end{array}$$

3. On a $|f(P_n)| = n+1$ et $||P_n|| = 1$ donc

$$\frac{|f(P_n)|}{||P_n||} \to +\infty$$

   ainsi, f n'est pas continue.
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$. On a $||P_n|| = 1$ et $f(P_n) = b^n$ donc

$$\frac{|f(P_n)|}{||P_n||} \to +\infty$$

   donc f n'est pas continue.

7.20 1467-St Cyr-MP (MPSI)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.

1. **Montrer que (E_n) a une solution unique dans $]0, +\infty[$. On la note x_n.**
2. **Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.**
3. **(Python) Écrire un programme qui renvoie une valeur approchée de x_n à ε près obtenue par dichotomie.**
4. **(Python) Afficher les 100 premières valeurs de x_n et conjecturer la limite de la suite.**
5. **Démontrer la conjecture.**

1. La fonction $f_n : x > 0 \mapsto x^n + x - 1$ est strictement croissante donc s'annule au plus une fois. Elle est aussi continue, tend vers -1 en 0 et vaut 1 en 1 : elle s'annule donc aussi au moins une fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

   On a bien montré l'existence et l'unicité de x_n.
2. - D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \le 1$.

- De plus, soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 \leq x_n^n + x_n - 1$ i.e. $f_{n+1}(x_n) \leq 0$. Par croissance de f_{n+1}, on a donc $x_{n+1} \geq x_n$.

3.

```
def dichotomie (n,e):
        a=0
        b=1
        while b-a>e:
                c=(a+b)/2
                if c**n+c-1>0:
                        b=c
                else:
                        a=c
        return a
```

4.

```
for n in range(1,101):
        print (dichotomie(n,0.01))
```

5. Montrons que la suite tend vers 1. Par le théorème de la limite monotone, on sait déjà que (x_n) est convergente et que sa limite ℓ est ≤ 1. Si $\ell < 1$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq \ell$ donc, par encadrement $x_n^n \to 0$ (noter qu'on utilise bien que $\ell < 1$ ici...) et ainsi, $x_n^n + x_n - 1 \to \ell - 1$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n + x_n - 1 = 0$, donc, un passage à la limite dans cette égalité est possible et donne $\ell - 1 = 0$ i.e. $\ell = 1$ ce qui est absurde !

   On conclut que $\ell = 1$.

7.21 1477-St Cyr-MP (MPSI)

Pour un entier n, on note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5 .

1. **Montrer que la série de terme général $\dfrac{r_n}{n(n+1)}$ converge.**
2. **On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k(k+1)}$. Déterminer S_{5n} en fonction de termes de la suite (H_p), où $H_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$.**
3. **En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k}{k(k+1)}$.**

1. On a $0 \leq \dfrac{r_n}{n(n+1)} \leq \dfrac{4}{n(n+1)}$ et $\sum \dfrac{4}{n(n+1)}$ CV donc $\sum \dfrac{r_n}{n(n+1)}$ CV.
2. On fait des paquets selon la congruence de k modulo 5 puis on effectue des décompositions en éléments simples :

$$\begin{aligned}
S_{5n} &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k}{k(k+1)} \\
&= \sum_{\substack{k \in [\![1,5n]\!] \\ k \equiv 0[5]}} \frac{r_k}{k(k+1)} + \sum_{\substack{k \in [\![1,5n]\!] \\ k \equiv 1[5]}} \frac{r_k}{k(k+1)} + \sum_{\substack{k \in [\![1,5n]\!] \\ k \equiv 2[5]}} \frac{r_k}{k(k+1)} + \sum_{\substack{k \in [\![1,5n]\!] \\ k \equiv 3[5]}} \frac{r_k}{k(k+1)} + \sum_{\substack{k \in [\![1,5n]\!] \\ k \equiv 4[5]}} \frac{r_k}{k(k+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(5i+1)(5i+2)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{(5i+2)(5i+3)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{(5i+3)(5i+4)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{4}{(5i+4)(5i+5)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5i+1} - \frac{1}{5i+2} + \frac{2}{5i+2} - \frac{2}{5i+3} + \frac{3}{5i+3} - \frac{3}{5i+4} + \frac{4}{5i+4} - \frac{4}{5i+5} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5i+1} + \frac{1}{5i+2} + \frac{1}{5i+3} + \frac{1}{5i+4} + \frac{1}{5i+5} - \frac{5}{5i+5} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{5n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \\
&= H_{5n} - H_n
\end{aligned}$$

3. Comme $H_p = \ln p + \gamma + o(1)$, on en déduit que $H_{5n} - H_n \to \ln 5$ c'est-à-dire que $S_{5n} \to \ln 5$. Or, comme (S_n) converge, la limite de (S_{5n}) est la limite de (S_n).

   Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k}{k(k+1)} = \ln 5$$

7.22 1479-St Cyr-MP (MPSI)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$une fonction deux fois dérivable et majorée. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t)$.

1. **Montrer que f est convexe.**
2. **Montrer que f' est négative.**
3. **Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.**
4. **Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.**
5. **Montrer que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est négative.**
6. **En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$.**

1. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'inégalité vérifiée par f'' implique la positivité de f''. Ainsi, par propriété du cours, f est convexe.
2. Comme f'' est positive, f' est croissante. f' a donc une limite en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. On la note ℓ. Supposons que $\ell > 0$ (on adapte le raisonnement pour $\ell = +\infty$). Alors, il existe un $X > 0$ tel que si $x \geq X$, alors $f'(x) \geq \frac{\ell}{2}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient, pour $x \geq X$:
$$\int_X^x f'(t)dt \geq \frac{x-X}{2}\ell$$
i.e.
$$f(x) \geq \frac{(x-X)}{2}\ell + f(X)$$
Cela donne $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ ce qui est impossible car f est majorée.
Ainsi, on a nécessairement, $\ell \leq 0$ et par conséquent, f' négative.
3. f est décroissante d'après le signe de f' donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$. Comme f est minorée par 0, cette limite est finie et positive. On la note L. Supposons que $L > 0$. Il existe alors $X' > 0$ tel que si $x \geq X'$, alors $f(x) \geq \frac{L}{2}$ et ainsi, $f''(x) \geq \frac{\alpha^2 L}{2}$.
En raisonnant comme dans la question précédent, on obtient alors que $f'(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ ce qui est exclu.
Finalement, $L = 0$.
4. On sait déjà que ℓ est finie et négative. Supposons que $\ell < 0$. Il existe $X'' > 0$ tel que si $x \geq X''$, alors $f'(x) \leq \frac{\ell}{2}$ et ainsi, pour $x \geq X''$,
$$f(x) \leq \frac{\ell}{2}(x - X'') + f(X'')$$
ce qui donne $f(x) \to -\infty$ en $+\infty$ ce qui n'est pas possible.
5. $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est dérivable et $(\alpha^2 f^2 - f'^2)' = 2\alpha^2 f f' - 2f' f'' = 2f'\left(\alpha^2 f - f''\right) \geq 0$. Ainsi, $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante et tend vers 0 en $+\infty$: elle est bien négative.
6. Soit $g : t \geq 0 \mapsto f(t)e^{\alpha t}$. g est dérivable et pour tout $t \geq 0$, $g'(t) = e^{\alpha t}\left(\alpha f(t) + f'(t)\right)$.
Or, $\underbrace{\alpha^2 f^2 - f'^2}_{\leq 0} = \underbrace{(\alpha f - f')}_{\geq 0}(\alpha f + f')$
Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
   - Si $\alpha f(x) - f'(x) = 0$, alors $f(x) = f'(x) = 0$ donc $\alpha f(x) + f'(x) = 0$.
   - Si $\alpha f(x) - f'(x) > 0$, alors $\alpha f(x) + f'(x) = \dfrac{\alpha^2 f^2(x) - f'^2(x)}{\alpha f(x) - f'(x)} \leq 0$.

   Finalement, $\alpha f + f' \leq 0$. g est donc décroissante et en particulier pour tout $t \geq 0$, $g(t) \leq g(0)$ i.e. $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

7.23 1484-St Cyr-MP (MPSI)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, concave et telle que $f(0) = 1$.

1. **Montrer que $\forall x \in [0,1], x f(x) \leqslant 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x$.**
2. **En déduire $\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.**

1. Soit $x \in]0,1]$. Soit $t \in [0,x]$. On a, par concavité de f

$$f(t) = f(\frac{t}{x}x + (1-\frac{t}{x})0) \geq \frac{t}{x}f(x) + (1-\frac{t}{x})f(0)$$

2. Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 xf(x)dx \leq 2\int_0^1 \int_0^x f(t)dtdx - \int_0^1 xdx$$

Faisons une intégration par parties dans $\int_0^1 \int_0^x f(t)dtdx$:

$$\int_0^1 \int_0^x f(t)dtdx = \left[x\int_0^x f(t)dt\right]_0^1 - \int_0^1 xf(x)dx$$

Finalement,

$$\int_0^1 xf(x)dx \leq 2\int_0^1 f(t)dt - 2\int_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3}\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{6}$$

Il reste à montrer qu'on a

$$\frac{2}{3}\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

En notant $I = \int_0^1 f(x)dx$, cela équivaut à montrer qu'on a $I - \frac{1}{4} \leq I^2$ i.e. $I^2 - I + \frac{1}{4} \geq 0$. Or, $I^2 - I + \frac{1}{4} = (I - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ d'où le résultat.

7.24 1488-CCINP-MP

On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1], g_n(t) = e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

1. **Montrer que :** $\forall (t,n) \in [0,1]\times\mathbb{N}^*, |g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$**.**
2. **Montrer que :** $\forall (t,n) \in [0,1]\times\mathbb{N}^*, \left|e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{t}{n}$**.**
3. **Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie** par $G_n : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t$**.**

1. g_n est dérivable et pour tout $t \in [0,1]$, $g_n'(t) = e^t\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right) = e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}(-\frac{t}{n})$.

   Finalement, pour $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leq e^t\frac{t}{n} \leq \frac{e^t}{n}$.

2. On a $|e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n| = e^{-t}|1-g_n(t)| = e^{-t}|g_n(0)-g_n(t)|$. D'après le théorème des accroissements finis, $|g_n(0)-g_n(t)| \leq t\sup_{[0,t]}|g_n'|$ or, $\sup_{[0,t]}|g_n'| \leq \frac{e^t}{n}$. Finalement, $\left|e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{t}{n}$.
3. A t fixé, $g_n(t) \to 1$. Montrons donc que (G_n) converge uniformément vers $Id_{[0,1]}$.

Soit $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|G_n(x) - x| &= |\int_0^x g_n(t)dt - \int_0^x 1dt| \\
&\leq \int_0^x |g_n(t) - 1|dt \\
&\leq \int_0^x e^t|e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n|dt \\
&\leq \frac{1}{n}\int_0^x te^t dt \\
&\leq \frac{1}{n}\int_0^1 te^t dt
\end{aligned}$$

Cette dernière majoration est indépendante de x et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$: on en déduit que (G_n) CVU vers $Id_{[0,1]}$.

7.25 1489-CCINP-MP

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0, \pi/2] \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).

2.(a) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Indication Considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.

(b) Soit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. La suite converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \pi/2]$?

3. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)\mathrm{d}t = g(0)$.

Ind. Utiliser $\displaystyle\left|\int_0^{\pi/2}[f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0) + f_n(t)g(0)]\,\mathrm{d}t - g(0)\right|$

1. Si $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, on a $f_n(x) = 0 \to 0$.

   Si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $|\cos x| < 1$ donc par croissances comparées, $n\cos^n x \to 0$.

   Finalement, (f_n) CVS vers la fonction nulle.

2. (a) Si (f_n) convergeait uniformément vers la fonction nulle, on aurait $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx \to 0$.

   Or, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} n\cos^n x\sin x dx = [-n\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$ ce qui ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

   (b) Soit $x \in [\alpha, \pi/2]$. On a $\sin x \leq 1$, $\cos x \leq \cos\alpha$ donc $|f_n(x)| \leq n\cos^n\alpha$: cette majoration ne dépend pas de x et tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi, (f_n) CVU vers la fonction nulle sur $[\alpha, \pi/2]$.

3.
$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)\mathrm{d}t - g(0)\right| &= \left|\int_0^{\pi/2}[f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0) + f_n(t)g(0)]\,\mathrm{d}t - g(0)\right| \\
&\leq \left|\int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0)dt\right| + \left|g(0)\left(\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt - 1\right)\right| \\
&\leq \int_0^{\pi/2} f_n(t)|g(t) - g(0)|dt + \left|g(0)\left(\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt - 1\right)\right|
\end{aligned}$$

   Soit $\varepsilon > 0$.

   - Par continuité de g en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in [0, \alpha]$, $|g(t) - g(0)| \leq \varepsilon$.
   - Comme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt \to 1$, il existe N tel que si $n \geq N$, $\displaystyle|\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt - 1| \leq \varepsilon$.
   - Comme (f_n) CVU vers 0 sur $[\alpha, \pi/2]$, il existe N' tel que si $n \geq N'$, $\displaystyle|\int_\alpha^{\pi/2} f_n(t) - f(t)dt| \leq \varepsilon$.

Notons $M = \max\limits_{[0,\pi/2]} |g|$ (qui existe bien car g est continue sur un segment).

Si $n \geq \max(N, N')$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)\mathrm{d}t - g(0)\right| &\leq \int_0^{\pi/2} f_n(t)|g(t)-g(0)|dt + \left|g(0)\left(\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt - 1\right)\right| \\
&\leq \int_0^{\alpha} f_n(t)\underbrace{|g(t)-g(0)|}_{\leq\varepsilon} dt + \int_\alpha^{\pi/2} \underbrace{f_n(t)}_{\leq\varepsilon}\underbrace{|g(t)-g(0)|}_{\leq 2M} dt + |g(0)\varepsilon \\
&\leq \varepsilon\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt + M\pi\varepsilon + |g(0)|\varepsilon \\
&\leq \varepsilon(1 + M\pi + |g(0)|)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

7.26 1490-St Cyr-MP

On définit une suite de fonctions $f_n : I = [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. **Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.**
2. **La série converge-t-elle normalement sur I ? uniformément sur I ?**
3. **Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.**

1. Soit $x \in I$. La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0. D'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $\sum f_n(x)$ CV et ainsi, $\sum f_n$ CVS.
2. • On a $||f_n||_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. Ainsi, on n'a pas la convergence normale sur I.
   • Soit $x \in I$ d'après le cours sur le séries alternées, $|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{1+kx}}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2+n}}$. Cette majoration est indépendante de x et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. On a donc CVU sur I.
3. On applique le théorème de la double limite :
   • $\sum f_n$ CVU sur I
   • Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.
   • $f_0(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

   On en déduit que $\sum f_n$ a une limite en $+\infty$ et que celle-ci vaut 1.

7.27 1493-CCINP-MP

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0 . Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

1. **Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.**
2. **Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.**
3. **Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.**

1. La suite (a_n) est bornée puisque convergente. Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.
   • Si $t = 1$, $u_n(t) = 0$: $\sum u_n(t)$ est bien convergente.

- Si $t \in [0,1[$, $\sum t^n$ converge donc $\sum M(1-t)t^n$ converge donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n| - 1 - t)t^n$ converge et finalement, $\sum u_n(t)$ converge absolument donc converge.

2. Une étude de la fonction $g : t \in [0,1] \mapsto (1-t)t^n$ montre que g est positive et maximale en $\dfrac{n}{n+1}$. Ainsi, $||u_n||_\infty = |a_n|\dfrac{1}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \sim |a_n|\dfrac{e^{-1}}{n}$. Ainsi, on a convergence normale ssi $\sum \dfrac{|a_n|}{n}$ converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $N \geq n+1$ et $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=n+1}^{N} a_k(1-t)t^k| &= |\sum_{k=n+1}^{N} a_k t^k - a_k t^{k+1}| \\
&= |\sum_{k=n+2}^{N} (a_k - a_{k-1})t^k + a_{n+1}t^{n+1} - a_N t^{N+1}| \\
&\leq \sum_{k=n+2}^{N} \underbrace{|a_k - a_{k-1}|}_{=a_{k-1}-a_k} \underbrace{t^k}_{\leq 1} + a_{n+1} + a_N \\
&\leq a_{n+1} - a_N + a_{n+1} + a_N \\
&\leq 2a_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant $N \to +\infty$, on obtient $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(1-t)t^k| \leq 2a_{n+1}$. Ceci est une majoration indépendante de t et qui tend vers 0 quand $n \to 0$ d'où la convergence uniforme.

7.28 1494-Navale-MP

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ définies sur $\mathbb{R}^+$par $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $u_n'(x) = \dfrac{1-n^2x}{(1+n^2x)^3}$. Ainsi, si $x > 0$, $u_n'(x) \sim_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2n^4}$ qui est le terme général positif d'une série convergente. $\sum u_n'$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Si on avait aussi convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$, on pourrait appliquer le théorème de la double limite puisque les u_n' ont une limite finie en 0 (qui est 1). Le théorème de la double limite démontrerait alors la convergence de la série $\sum 1$ ce qui est faux. Ainsi, on n'a pas CVU sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si $x > 0$, $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2x}$ qui est le terme général positif d'une série convergente. Donc $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+$.

  D'après le signe de u_n', on a $||u_n||_\infty = u_n(\dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{1}{4n^2}$ qui est le terme général positif d'une série convergente. Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et donc aussi uniformément.

7.29 1495-St Cyr-MP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. **Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.**
2. **Étudier la continuité de la somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.**
3. **Donner un équivalent de f en 0^+.**

1. Soit $x > 0$. On a $f_n(x) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{xn^3}$ qui est le terme général positif d'une série convergente. De plus $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ CV. Finalement, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a, pour $x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{b}{n(1+n^2a)}$ donc $||f_n||_{\infty,[a,b]} \leq \dfrac{b}{an^3}$ qui est le terme général positif d'une série convergente. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$. Comme les f_n sont continues sur $[a,b]$, on obtient finalement la continuité de f sur $[a,b]$.

   Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On va faire une comparaison série/intégrale.

   On a pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$,

$$\frac{x}{n(1+n^2x^2)} = \frac{x}{n} + \frac{-x^3n}{1+n^2x^2}$$

   Comme $t > 0 \mapsto \dfrac{x}{t} - \dfrac{x^3t}{1+t^2x^2}$ est décroissante, on a pour $n \geq 2$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{x}{t} - \frac{x^3t}{1+t^2x^2}dt \geq \frac{x}{n} - \frac{x^3n}{1+n^2x^2} \geq \int_{n}^{n+1} \frac{x}{t} - \frac{x^3t}{1+t^2x^2}dt$$

   $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{t(1+t^2x^2}dt$ CV et on obtient en sommant

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{t} - \frac{x^3t}{1+t^2x^2}dt \geq f(x) - f_1(x) \geq \int_2^{+\infty} \frac{x}{t} - \frac{x^3t}{1+t^2x^2}dt$$

   i.e.

$$[x\ln t - \frac{x}{2}\ln(1+t^2x^2)]_1^{+\infty} \geq f(x) - f_1(x) \geq [x\ln t - \frac{x}{2}\ln(1+t^2x^2)]_2^{+\infty}$$

   Or, $x\ln t - \dfrac{x}{2}\ln(1+t^2x^2) = x\ln t - \dfrac{x}{2}\ln(t^2x^2) - \dfrac{x}{2}\ln(1+\dfrac{1}{t^2x^2}) = -x\ln x - \dfrac{x}{2}\underbrace{\ln(1+\dfrac{1}{t^2x^2})}_{\sim\frac{1}{t^2x^2}} \to -x\ln x$ lorsque $t \to +\infty$.

   Finalement

$$-x\ln x + \frac{x}{2}\ln(1+x^2) \geq f(x) - f_1(x) \geq -x\ln x - x\ln 2 + \frac{x}{2}\ln(1+4x^2)$$

   Par encadrement, on obtient $f(x) - f_1(x) \sim -x\ln x$ lorsque $x \to 0$ et ainsi, $f(x) \sim -x\ln x$ lorsque $x \to 0$.

7.30 1498-CCINP-MP

On pose, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

1. **Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum I_nx^n$ est $\geqslant 1$.**
2. **Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.**
3. **Donner un équivalent simple de I_n.**
4. **Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_nx^n$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_nx^n$ pour $x \in]-R,R[$.**

1. Pour $t \in [0,\pi/4]$, on a $0 \leq \tan t \leq 1$, donc, par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{4}$. Le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1 et $I_n = O(1)$ donc le rayon de convergence de $\sum I_nx^n$ est ≥ 1.
2. $I_n + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n t(1+\tan^2 t)dt = [\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} t]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$.
3. Pour $t \in [0,\pi/4]$, on a $\tan^{n+1} t \leq \tan^n t$ donc par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$. (I_n) est donc décroissante. Ainsi, $I_{n+2} + I_n \leq 2I_n$ i.e. $I_n \geq \dfrac{1}{2(n+1)}$.

   D'autre part, $\dfrac{1}{n-1} = I_n + I_{n-2} \geq 2I_n$ donc $I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$.

   Finalement,

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{1/2n} \leq \frac{n}{n-1}$$

   donc par encadrement, $\dfrac{I_n}{2n} \to 1$ et $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

4. Le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{2n}x^n$ est 1 donc $R = 1$.

Soit $x \in]-1,1[$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2}x^{n+2} + I_n x^{n+2} = \frac{x^{n+2}}{n+1}$ et ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+2}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+1}$$

i.e.

$$f(x) - I_0 - I_1 x + x^2 f(x) = -x\ln(1-x)$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(-x\ln(1-x) + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}x\right)$$

7.31 1499-CCINP-MP

1. Étudier la convergence simple de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$. On note D l'ensemble de convergence et $S(x)$ la somme sur D. L'application S est-elle continue sur D ?

2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

3. En déduire la valeur de $\lim_{x\to 1^-}(1-x)S(x)$.

1. On a $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est 1. Ainsi, on a $]-1,1[\subset D \subset [-1,1]$.

En 1, il y a divergence car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et ainsi $\sum \sin\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge aussi.

En -1, il y a convergence d'après le critère spécial relatif aux séries alternées puis $(\sin\frac{1}{\sqrt{n}})$ est décroissante et tend vers 0.

Finalement,

$$D = [-1,1[$$

D'après le cours, elle est continue sur $]-1,1[$.

Montrons qu'elle est aussi continue en -1. Soit $x \in [-1,0]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, selon une propriété sur les séries alternées, $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{k}}x^k| \leq \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}|x|^{n+1} \leq \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ qui est indépendant de x et tend vers 0. Ainsi, la série (de fonctions continues) converge uniformément sur $[-1,0]$ et en particulier est continue en -1.

2. On a $||x \mapsto (\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}})x^n||_{\infty,[-1,1]} = \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or, au voisinage de $+\infty$,

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$$

et

$$\begin{aligned}
\sin\frac{1}{\sqrt{n-1}} &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1-1/n}}\right)\\
&= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(1+O(1/n))\right)\\
&= \sin(\frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}))\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

Finalement, $||x \mapsto (\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}})x^n||_{\infty,[-1,1]} = O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ CV donc la série $\sum(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}})x^n$ converge bien normalement.

3. Notons pour $x \in [-1,1]$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$. C'est une fonction continue (car série de fonctions continues qui converge normalement). Ainsi, $\lim\limits_{1} f = f(1) = -\sin 1$.

   D'autre part, pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
(1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} x^{n+1} \\
&= x\sin 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}} x^n \\
&= f(x) + x\sin 1
\end{aligned}$$

   Donc, $(1-x)S(x) \to 0$ lorsque $x \to 1$.

7.32 1507-CCINP-MP

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$**.**

1. **Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.**
2. **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'expression de f' puis de f.**
3. **Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$.**

1. Soit $x > 0$.
   - On a, au voisinage de 0, $\arctan(xt) = O(t)$ et $\arctan(t) = O(t)$ donc $\dfrac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} = O(1)$ ce qui prouve l'intégrabilité en 0.
   - On a
   $$\forall u > 0, \arctan\,(u) + \arctan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$$
   donc
   $$\forall t > 0, \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} = \frac{\arctan\frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{xt}}{t} = O_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
     ce qui prouve l'intégrabilité en $+\infty$.

   Finalement, f est bien définie en x.
2. - f est continue : on utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

     ★ Pour $t > 0$, $x > 0 \mapsto \dfrac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}$ est continue

     ★ Pour $x > 0$, $t > 0 \mapsto \dfrac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}$ est continue par morceaux

     ★ Soit $a < 1 < b$ et $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$, on a
     $$\left| \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} \right| \leq \frac{\arctan(bt) - \arctan(at)}{t}$$
       qui ne dépend pas de x et est intégrable.

       Pour cette majoration, on remarque que $h : x \in [a,b] \mapsto \arctan(xt) - \arctan(t)$ est croissante et qu'on a le tableau suivant

x	a		1		b
					$\arctan(bt) - \arctan(t)$
				$\nearrow$	
h			0		
		$\nearrow$			
	$\arctan(at) - \arctan(t)$				

     On conclut finalement que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$:on utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

     ★ Pour $t > 0$, $x > 0 \mapsto \dfrac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$

★ Pour $x>0$, $t>0 \mapsto \dfrac{\arctan(xt)-\arctan(t)}{t}$ est continue par morceaux et intégrable

★ Pour $x>0$, $t>0 \mapsto \dfrac{1}{1+x^2t^2}$ est continue par morceaux et intégrable

★ Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|\frac{1}{1+x^2t^2}\right| \leq \frac{1}{1+a^2t^2}$$

qui ne dépend pas de x et est intégrable.

On conclut finalement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a pour tout $x>0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} dt$$

- On obtient alors, pour $x>0$:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x}\arctan(xt)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

- Et finalement, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour $x>0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x)+K$. Comme $f(1)=0$, on a $K=0$.

3. - 1ère méthode : On reconnaît $f(a)-f(b)$ c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{a}{b}$.
   - 2e méthode : On pose $u=bt$ et on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(au/b)-\arctan(u)}{u}du$: c'est donc $f(a/b)$ c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{a}{b}$.

7.33 1508-CCINP-MP

On pose $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(x+t)}\mathrm{d}t$.

1. **Montrer que G est bien définie pour $x>0$.**
2. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^y \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(n+t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\ \mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\ \mathrm{d}t\right)$.**
3. **On pose $H(n)=nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n+1)-H(n)-\dfrac{1}{2n}$ converge. En déduire un équivalent de $G(n)$.**

1. - $t>0 \mapsto \dfrac{t-\lfloor t\rfloor}{t(x+t)}$ est continue par morceaux
   - En $+\infty$: $t-\lfloor t\rfloor = O(1)$ donc $\dfrac{t-\lfloor t\rfloor}{t(x+t)} = O(1/t^2)$ avec $t>0 \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$.
   - En 0 : $t-\lfloor t\rfloor = t$ donc $\dfrac{t-\lfloor t\rfloor}{t(x+t)} = \dfrac{1}{x+t} \to \dfrac{1}{x}$ lorsque $t\to 0$. D'où l'intégrabilité en 0.
2. Soit $t>0$. On a

$$\frac{1}{t(n+t)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{n+t}\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(n+t)}\mathrm{d}t &= \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\ \mathrm{d}t - \int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{n}\ \mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\ \mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{u-\lfloor u\rfloor}{u}\ \mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

en posant $u=t+y$

3. On a

$$0 \leq \int_y^{y+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}dt \leq \int_y^{y+n}\frac{dt}{t}$$

Or, $\dfrac{y}{y+n}\dfrac{dt}{t} = \ln\dfrac{y+n}{n} \to 0$ lorsque $y\to+\infty$ donc

$$G(n) = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}dt$$

et

$$\begin{aligned} H(n+1)-H(n)-\frac{1}{2n} &= \int_n^{n+1} \frac{t-n}{t} dt - \frac{1}{2n} \\ &= 1-n[\ln(t)]_n^{n+1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} \\ &= 1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(1/n^3)\right)-\frac{1}{2n} \\ &= O(1/n^2) \end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ CV et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ donc $\sum (H(n+1)-H(n)-\frac{1}{2n})$ C. Notons S sa somme.

On a $\sum_{k=1}^{n} H(k+1)-H(k)-\frac{1}{2k} = S + o(1)$ ie $H(n+1)-H(1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + o(1)$.

Or, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ donc $H(n) \sim \ln(n)$ et

$$G(n) \sim \frac{\ln n}{n}$$

7.34 1509-Navale-MP

Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. **Exprimer $G(x)$ en fonction en fonction de $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.**
2. **En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.**

1. On s'intéresse à G'. Pour prouver que G est dérivable et expliciter G', on utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

   - Soit $t \in [0,1]$. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $x \mapsto -2xe^{-x^2(1+t)^2}$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$.
     - La fonction $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0,1]$.
     - La fonction $t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t)^2)}$ est continue
   - Soit $a > 0$. Pour $(x,t) \in [-a,a] \times [0,1]$, $|-2xe^{x^2(1+t^2)}| \leq \underbrace{2a}_{\phi(t)}$ qui est bien intégrable sur $[0,1]$ (car constante).

   D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, G est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt$. C'est aussi $G'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$ et finalement, en posant $u = xt$, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

   $$G'(x) = -2F'(x)F(x)$$

   Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait $G = -F^2 + K$.
   En utilisant $G(0) = \frac{\pi}{4}$, on obtient $K = \frac{\pi}{4}$.
   Finalement

   $$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = -F^2(x) + \frac{\pi}{4}$$

2. Il reste à faire tendre x vers $+\infty$ dans cette expression. Pour cela, on utilise le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

   - Si $t \in [0,1]$, on a $\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$
   - Si $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue et $t \mapsto 0$ aussi.

- Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, $|\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0,1]$.

  On obtient donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \displaystyle\int_0^1 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = 0$.

  Finalement, $F^2(x) \to \dfrac{\pi}{4}$ lorsque $x \to +\infty$.

  Comme de plus, F est positive sur $\mathbb{R}^+$, on a finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.35 1511-CCINP-MP

1. **Soient $a,b>0$. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \dfrac{1}{au^2+b}$.**
2. **Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ lorsque $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$.**
3. **Soit $f : x \in]1,+\infty\left[\mapsto \displaystyle\int_0^\pi \ln(\cos(t)+x)\mathrm{d}t\right.$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis exprimer f' sans intégrale.**
4. **En déduire une expression de f.**

1. On a $\dfrac{1}{au^2+b} = \dfrac{1}{b}\dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{b}}\right)^2+1}$. Une primitive est donc $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{ab}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)$
2.
$$\begin{aligned}
\cos t &= \cos(2.\frac{t}{2})\\
&= 2\cos^2\frac{t}{2} - 1\\
&= 2\frac{1}{1+\tan^2\frac{t}{2}} - 1\\
&= \frac{1-\tan^2\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$
3. On remarque déjà que pour $x>1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\cos t + x > 0$. On n'a pas donc de problème de définition du ln.

   On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

   - Soit $t \in]0,\pi[$. La fonction $x > 1 \mapsto \ln(\cos(t)+x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   - Soit $x > 1$.
     - $t \in]0,\pi[\mapsto \ln(\cos t + x)$ est continue sur $]0,\pi[$ donc intégrable sur $]0,\pi[$ qui est borné
     - $t \in]0,\pi[\mapsto \dfrac{1}{\cos t + x}$ est continue sur $]0,\pi[$.
   - Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$. Pour $(x,t) \in [a,b]\times[0,\pi]$, $|\ln(\cos t + x)| \leq \max(\ln(1+b), \ln(a-1))$ qui est une constante (donc intégrable sur le borné $]0,\pi[$.

   On conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x>1$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{\cos t + x}$.

   On effectue le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$ qui est bien possible puisque $t \in]0,\pi[\mapsto \tan\dfrac{t}{2}$ est bien défini, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif.

   On obtient
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+x}\frac{2}{1+u^2}du\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2(x-1)+x+1}du\\
&= [\frac{2}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}\mathrm{Arctan}\left(u\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)]_0^{+\infty}\\
&= \pi\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

4. On en déduit l'existence de $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 1$, $f(x) = \pi \operatorname{argch}(x) + K$ ie $f(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + K$.
   Pour déterminer K, on s'intéresse à f au voisinage de $+\infty$.
   Soit $x > 1$. On a

$$\begin{aligned} f(x) - \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \int_0^\pi \ln x + \ln(1 + \frac{\cos t}{x}) dt - \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= \int_0^\pi \ln(1 + \frac{\cos t}{x}) dt - \pi \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \end{aligned}$$

   Or, pour $x > 1$ et $t \in [0, \pi]$, $\ln(1 - \frac{1}{x}) \leq \ln\left(1 + \frac{\cos t}{x}\right) \leq \ln(1 + \frac{1}{x})$ donc

$$\pi \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{\cos t}{x}\right) dt \leq \pi \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

   Ainsi, par encadrement, $\displaystyle\int_0^\pi \ln(1 + \frac{\cos t}{x}) dt \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
   Finalement, $f(x) - \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \to -\pi \ln 2$ lorsque $x \to +\infty$.

$$\forall x > 1, \int_0^\pi \ln(\cos(t) + x) dt = \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \pi \ln 2$$

7.36 1518-CCINP-MP

1. **Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$.**

2. **Montrer que $I = \displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.**

1. $f : t > 0 \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$ est continue, au voisinage de 0, $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est une fonction intégrable, au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est convergente.

2. On a, pour $t > 0$, $\dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = \dfrac{\sqrt{t}}{e^t} \dfrac{1}{1 - e^{-t}} = \dfrac{\sqrt{t}}{e^t} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt}$ car $e^{-t} \in]-1, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on pose $f_k(t) = \sqrt{t} e^{-(k+1)t}$. On applique le théorème d'intégration terme à terme :
   - $\sum f_k$ CVS vers $f : t > 0 \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$
   - Les f_k sont continues par morceaux, f est continue par morceaux
   - Les f_k sont intégrables et $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt$ CV car : f_k est intégrable car elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et en $+\infty$, $f(t) = o(1/t^2)$. De plus, en posant $t = \dfrac{u^2}{k+1}$, on obtient

$$I_k = \frac{2}{(k+1)\sqrt{k+1}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du$$

   puis, une intégration par parties (où on pose $\phi(u) = u$, $\psi(u) = e^{-u^2}$ avec $\phi\psi$ qui a bien une limite finie en $+\infty$) donne

$$\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}$$

   Finalement,

$$\int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2(k+1)(\sqrt{k+1}}$$

   qui est bien le terme général d'une série convergente.
   Le théorème d'intégration terme à terme permet donc d'obtenir

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}$$

7.37 1519-CCINP-MP

Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln(x)^q \, \mathrm{d}x$.

1. **Montrer la convergence des intégrales $I_{p,q}$ et les calculer.**
2. **Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{x\ln(x)} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}$.**

1. - $x \in]0,1] \mapsto x^p \ln^q x$ est continue, et, en 0, $x^p \ln^q x = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x > 0 \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable. Cela prouve l'intégrabilité de la fonction et donc la convergence de l'intégrale.
   - De plus, une intégration par partie donne pour $q \geq 1$:

$$I_{p,q} = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \ln^q(x)\right]_0^1 - \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^p \ln^{q-1}(x) dx$$

   i.e. $I_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

   Finalement,

$$I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} I_{p,0}$$

   i.e.

$$I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

2. Soit $x \in]0,1]$. On a $e^{x\ln x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^k \ln^k x}{k!}}_{f_k(x)}$. On applique le théorème d'intégration terme à terme :
   - $\sum f_k$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : x > 0 \mapsto x^x$
   - Les f_k sont continues par morceaux et intégrables d'après 1.
   - f est continue par morceaux
   - $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_k|$ converge car $\displaystyle\sum \frac{k!}{k!(k+1)^{k+1}}$ converge ($0 \leq \dfrac{1}{k^k} \leq \dfrac{1}{k^2}$).

   On en déduit qu'on a

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

7.38 1521-CCINP-MP

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ soit $f_n : x \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx} - 1}$ et sous réserve d'existence, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.

1. **Montrer que I_n existe.**
2. **Montrer que $I_n = 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(x) \mathrm{e}^{-knx} \, \mathrm{d}x$.**
3. **En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.**

1. - f_n est continue sur $]0,+\infty[$
   - au voisinage de 0, $f_n(x) \sim \dfrac{2x}{nx}$ donc f_n a une limite finie en 0 et est donc intégrable en 0.
   - au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{e^x}{e^{nx}}$ i.e. $f(x) \sim e^{-(n-1)x}$ qui est intégrable en $+\infty$ (car $n \geq 2$) : f est donc intégrable en $+\infty$.

2. Pour $x > 0$, comme $e^{-nx} \in]-1,1[$, on a $\dfrac{1}{e^{nx} - 1} = e^{-nx} \dfrac{1}{1 - e^{nx}} = e^{-nx} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-nkx} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-nkx}$.

   Finalement

$$f_n(x) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{sh}(x) e^{-knx}$$

On applique maintenant le théorème de convergence dominée. Pour cela, on note $S_p(x) = \sum_{k=1}^{p} 2\text{sh}(x)e^{-knx}$.

- (S_p) converge simplement vers f_n
- Les S_p ainsi que f_n sont continues
- Pour $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $|S_p(x)| \leq f_n(x)$ avec f_n qui est intégrable.

On en déduit qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \lim_{p\to+\infty} S_p(x)dx = \lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_p(x)dx$$

ie

$$I_n = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{sh}(x)\text{e}^{-knx}\ \text{d}x$$

3. En particulier, on a

$$I_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{x(1-2k)} - e^{x(-1-2k)} dx$$

soit

$$I_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$$

et finalement,

$$I_2 = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

D'autre part, $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}-1}$. En posant $u = e^x$, on obtient

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{u-\frac{1}{u}}{u^2-1}\frac{du}{u}$$

soit

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1$$

On conclut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

7.39 1527-CCINP-MP

1. **Déterminer les extrema de $f : (u,v) \in [0,1]^2 \mapsto uv(1-u-v)$.**
2. **Soit (A,B,C) un triangle d'aire égale à 1 . Soit M un point dans le triangle. Maximiser le produit des distances de M aux côtés du triangle.**

1. Comme $[0,1]^2$ est compact, et que f est continue, f admet un maximum et un minimum.

- On commence par s'intéresser aux extrema locaux dans $]0,1[^2$.

  f est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour $(u,v) \in [0,1]^2$, $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = v(1-2u-v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = u(1-2v-u)$.

  Ainsi, (u,v) est un point critique ssi $\begin{cases} 1-2u-v=0 \\ 1-2v-u=0 \end{cases}$. Ainsi, on n'a qu'un seul point critique : $(1/3, 1/3)$.

  Écrivons la matrice hessienne de f en ce point :

$$H_f(1/3,1/3) = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

  On a $\det H_f(1/3,1/3) > 0$ et $\text{tr}(H_f(1/3,1/3)) < 0$: f admet donc en $(1/3,1/3)$ un maximum local.

- On s'intéresse ensuite aux extrema locaux sur la frontière de $[0,1]^2$. Si $u=0$ ou $v=0$, on a $f(u,v)=0$. Si $u=1$ et $v\in[0,1]$, on a $f(u,v)=-v^2\leq 0$. Si $v=1$ et $u\in[0,1]$, $f(u,v)=-v^2\leq 0$

  Finalement, f admet en $(1/3,1/3)$ un maximum global et en $(1,1)$ un minimum global.

2. Notons $c=AB$, $b=AC$ et $a=BC$, puis $u=d(M,(AB))$, $v=d(M,(BC))$ et $w=d(M,(AC))$. L'aire du triangle (ABC) est 1 et c'est aussi $\dfrac{1}{2}(uc+va+wb)$. Ainsi, $w=\dfrac{2-uc-av}{b}$. On a de plus $u\in[0,\dfrac{2}{c}]$, $v\in[0,\dfrac{2}{a}]$ et $w\in[0,\dfrac{2}{b}]$.

   On cherche à maximiser pour $(u,v)\in[0,\dfrac{2}{c}]\times[0,\dfrac{2}{a}]$ la quantité : $uv\left(\dfrac{2-uc-av}{b}\right)$ qui est maximale lorsque celle-ci l'est aussi $\dfrac{uc}{2}\dfrac{av}{2}(1-\dfrac{uc}{2}-\dfrac{va}{2})$ ie $f(\dfrac{uc}{2},\dfrac{av}{2})$. C'est maximal lorsque $\dfrac{uc}{2}=\dfrac{av}{2}=\dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire lorsque $u=\dfrac{2}{3c}$, $v=\dfrac{2}{3a}$ et $w=\dfrac{2}{3b}$. Le produit des longueurs vaut alors $\dfrac{8}{27abc}$.

   Il s'agit maintenant de vérifier qu'un tel point M existe bien dans le triangle. Il est conseillé de faire un dessin. Considérons G le centre de gravité du triangle. Montrons que les trois triangles (ABG), (ACG) et (BCG) ont la même aire : cela prouvera que G convient.

   Notons C' le milieu de $[A,B]$, A' le milieu de $[B,C]$ et B' le milieu de $[A,C]$.

   Les triangles $(AA'B)$ et $(AA'C)$ ont la même aire (mêmes longueurs de bases et de hauteurs). Or, l'aire de $(AA'B)$ est la somme des aires des triangles (AGB) et (BGA') et c'est donc aussi la somme des aires des triangles (AGC) et (CGA'). Ainsi, les triangles (AGC) et (AGB) sont de même aire. Et de même, ils ont donc la même aire que (BGC).

7.40 1531-CCINP-MP

Une personne sur une échelle est en train de peindre un bâtiment. La probabilité qu'un passant reçoive une goutte de peinture est $p\in]0,1[$. On note X (resp. Y) le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte.)

1. **On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?**
2. **On note à présent N le nombre de passants dans la journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donner la loi de X et de Y. Donner l'espérance et la variance de X.**
3. **Montrer que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.**

1. On note X_i la var qui vaut 1 si le passant i a reçu une goutte et 0 sinon. Les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(1/p)$. X est leur somme donc $X\sim\mathcal{B}(n,p)$. De même, $Y\sim\mathcal{B}(n,1-p)$.

   X et Y ne sont pas indépendantes car $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$ alors que $P(X=0\cap Y=0)=0$.

2. On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

   Soit $i\in\mathbb{N}$. D'après ce qui précède la loi conditionnelle de X sachant $N=i$ est $\mathcal{B}(i,p)$. La famille $\{(N=i),i\in\mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, donc, selon la formule des probabilités totales, si $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=k|N=i)P(N=i)\\
&= \sum_{i=k}^{+\infty}\binom{i}{k}p^k(1-p)^{i-k}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\\
&= \frac{p^k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(i-k)!}(\lambda(1-p))^{i-k}\\
&= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}\\
&= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $X\sim\mathcal{P}(p\lambda)$.

   De la même façon, $Y\sim\mathcal{P}((1-p)\lambda)$.

   On a $E(X)=\lambda p$ et $V(X)=\lambda p$.

3. Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$. On a

$$\begin{aligned} P(X=i,Y=j) &= P(X=i,N=i+j)\\ &= P(X=i|N=i+j)P(N=i+j)\\ &= \binom{i+j}{i}p^i(1-p)^je^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\\ &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}\\ &= P(X=i)P(Y=j)\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ puisque X et Y sont indépendantes.

7.41 1535-CCINP-MP

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. En posant $\min\emptyset=+\infty$, on définit $T_1=\min\{n\in\mathbb{N}^*,X_n=1\}$ et $T_2=\min\{n>T_1,X_n=1\}$.

1. **Que représente T_1 ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.**
2. **Que représente T_2 ? Calculer $\mathbf{P}(T_2-T_1=k,T_1=n)$.**
3. **Vérifier que T_2-T_1 et T_1 sont indépendantes. En déduire la loi de T_2.**

1. T_1 est le rang d'apparition du premier 1, s'il existe. Donc $T_1\sim\mathcal{G}(p)$, $E(T_1)=\dfrac{1}{p}$, $V(T_1)=\dfrac{1-p}{p^2}$
2. T_2 est le rang d'apparition du deuxième 1.
   - Si k et n sont des entiers, on a $P(T_2-T_1=k;T_1=n)=P(X_1=0,X_2=0,...,X_n=1,X_{n+1}=0,...,X_{n+k}=1)=p^2(1-p)^{k+n-2}$.
   - On a $P(T_1=+\infty)=P(\cap_{k=1}^{+\infty}X_k=0)$. Par continuité monotone de P, $P(T=+\infty)=\lim\limits_{N\to+\infty}P(\cap_{k=1}^{N}X_k=0)=\lim\limits_{N\to+\infty}(1-p)^N=0$. Ainsi, si $k\in\mathbb{N}\cap\{+\infty\}$, $P(T_2-T_1=k,T_1=+\infty)=0$.
   - De même, $P(T_2-T_1=+\infty)=0$ et ainsi, si $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$,$P(T_2-T_1=+\infty,T_1=n)=0$.
3. L'ensemble $\{(T_1=n),n\in\mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(T_2-T_1=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty}P(T_2-T_1=k,T_1=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}p^2(1-p)^{k+n-2}\\ &= p^2(1-p)^{k-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}\\ &= p(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

Ainsi, $P(T_2-T_1=k,T_1=n)=P(T_2-T_1=k)P(T_1=n)$ ce qui prouve l'indépendance de T_2-T_1 et T_1.
On a $T_2(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$. Soit $i\geq 2$. On a

$$\begin{aligned} P(T_2=i) &= \sum_{j=1}^{i-1}P(T_2=i,T_1=j)\\ &= \sum_{j=1}^{i-1}P(T_2-T_1=i-j,T_1=j)\\ &= \sum_{j=1}^{i-1}p^2(1-p)^{i-2}\\ &= (i-1)p^2(1-p)^{i-2}\end{aligned}$$

7.42 1537-St-Cyr-MP

On considère une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $p\in]0,1[$. Soient $r\in\mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire comptant le nombre de répétitions avant d'obtenir le r^{e} succès.

1. **Écrire une fonction pascal (p,r) qui simule X et renvoie le nombre d'épreuves avant le r^{e} succès.**
2. **Écrire une fonction moyenne (p,r,k) qui renvoie une valeur moyenne pour k répétitions de la fonction précédente.**

3. Calculer la loi de X.

4. Calculer l'espérance de X.

1. On commence par simuler une var de loi $\mathcal{B}(p)$.

```
from random import *
```

On importe la bibliothèque `random` qui contient la `random` qui permet de générer un flottant au hasard compris entre 0 et 1.

```
def bernoulli (p):
    x=random()
    if x<p:
        return True
    else:
        return False
```

On tire un flottant au hasard entre 0 et 1. S'il est inférieur à p, on renvoie 1 (ou `True`) et sinon, on renvoie 0 (ou `False`).

```
def pascal (p,r):
    compteur=0
    succes=0
    while succes<r:
        compteur=compteur+1
        if bernoulli(p):
            succes=succes+1
    return compteur
```

La variable `compteur` compte le nombre de tirages effectués. La variable `succes` compte le nombre de "succès". Dès que `succes` vaut `r`, on renvoie `compteur`.

2.

```
def moyenne(p,r,k):
    m=0
    for i in range(k):
        m=m+pascal(p,r)
    return m/k
```

3. On a $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$.

On a $X = n$ lorsque :

- $X_n = 1$
- Exactement $r-1$ va X_1,...,X_{n-1} valent 1

Ainsi, $P(X=n) = p.\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}$ ie

$$P(X=n) = \binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$$

4. On rappelle qu'on a pour $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^{a+1}} = \sum_{k=a}^{+\infty}\binom{k}{a}x^{k-a}$$

Soit $n \geq r$, on a $nP(X=n) = rp^r\binom{n}{r}(1-p)^{n-r}$. Comme $|1-p|<1$, $\sum nP(X=n)$ converge, $X \in L^1$ et don espérance est

$$\begin{aligned}\sum_{n=r}^{+\infty} nP(X=n) &= rp^r \underbrace{\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}(1-p)^{n-r}}_{\frac{1}{p^{r+1}}} \\ &= \frac{r}{p}\end{aligned}$$

7.43 1538-CCINP-MP

Soient $p \in]0,1[, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. **Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X_1 \geqslant m)$ et $\mathbf{P}(X_1 \leqslant m)$.**
2. **Posons $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Y \geqslant m)$ et $\mathbf{P}(Y \leqslant m)$. Reconnaître la loi de Y et déterminer $\mathbf{E}(Y)$.**

1. •

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq m) &= \sum_{k=m}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \\ &= (1-p)^{m-1} p \sum_{k=m}^{+\infty} (1-p)^{k-m} \\ &= (1-p)^{m-1} p \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

   • $P(X_1 \leq m) = 1 - P(X_1 \geq m+1) = 1 - (1-p)^m$.

2. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   • Par indépendance des X_i, on a $P(Y \geq m) = P(\cap_{i=1}^n (X_i \geq m)) = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq m) = (1-p)^{n(m-1)}$.
   • $P(Y \leq m) = 1 - P(Y \geq m+1) = 1 - (1-p)^{nm}$
   • $P(Y = m) = P(Y \geq m) - P(Y \geq m+1) = (1-p)^{n(m-1)} - (1-p)^{nm} = (1-p)^{n(m-1)}(1-(1-p)^n)$. Ainsi, $Y \sim \mathcal{G}(1-(1-p)^n)$.
   • D'après le cours, $E(Y) = \dfrac{1}{1-(1-p)^n}$

7.44 1542-Navale-MP

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. ayant une variance. On pose, pour $i \in [1, n]\!], Y_i = X_1 + \cdots + X_i$. On note $M = (\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. **Relier M à la matrice $A^T A$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**
2. **Encadrer les valeurs propres de M.**

1. On note $V = V(X_1)$.

   On a d'une part, $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

   D'autre part, si $i \leq j$, on a $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{1 \leq k \leq i, 1 \leq \ell \leq j} \underbrace{\operatorname{Cov}(X_k, X_\ell)}_{=0 \text{ si } k \neq \ell} = iV$.

   Ainsi, $M = V A^T A$.

2. On sait que $A^T A$ est symétrique positive donc son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$ et, comme A est inversible, $A^T A$ l'est aussi, et on a donc $\operatorname{Sp}(A^T A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   Il s'agit maintenant de majorer les valeurs propres de $A^T A$. Pour cela, on utilise que si on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $||.||_2$, on a

$$\max \operatorname{Sp}(A^T A) = ||A^T A|| = ||A||^2$$

   Détaillons cela.

Soit $(X_1,...,X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A^TA et soit λ_1,...,λ_n les valeurs propres associées. Soit $X=\sum_{i=1}^n a_iX_i$. On a $||A^TAX||_2^2=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i^2\leq \max_{1\leq i\leq n}\lambda_i^2||X||_2^2$ et ainsi, $||A^TA||\leq \max \mathrm{Sp}(A^TA)$.

Et, si X est un vecteur propre associé à $\lambda=\max\mathrm{Sp}(A^TA)$, alors $||A^TAX||^2=\lambda^2||X||_2^2$.

On a bien montré $\max\mathrm{Sp}(A^TA)=||A^TA||$.

De plus,

$$||A^TA||=||A||^2$$

car :

$\sup_{X\neq 0}\dfrac{||A^TAX||_2}{||X||_2}\geq \sup_{X\neq 0}\dfrac{||X||||A^TA||}{||X||^2}$, mais, par Cauchy-Schwarz, $||X||||A^TAX||\geq <X,A^TAX>$ i.e. $||X||||A^TAX||\geq \underbrace{X^TA^TAX}_{||AX||_2^2}$. On a donc obtenu, $||A^TA||\geq||A||^2$.

Enfin, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda=\max\mathrm{Sp}(A^TA)$, on a $||AX||^2=(AX)^TAX=\lambda^2||X||^2$ donc $||A||\geq\lambda$ et ainsi, $||A||=||A^TA||$.

Il nous reste à déterminer $||A||$. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ de norme 1. On a alors $AX=\begin{pmatrix}x_1+x_2+..+x_n\\x_2+x_3+...+x_n\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ donc $||AX||_2\leq\sqrt{n}$. Et si $X=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, on a $||AX||_2=\sqrt{n}$.

Finalement, $\max\mathrm{Sp}(A^TA)=n$ i.e. $\mathrm{Sp}(A^TA)\subset]0,n]$ et $\mathrm{Sp}(M)\subset]0,\frac{n}{V}]$.

7.45 1543-St Cyr-MP

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $C_n=\mathrm{card}\{X_1,\ldots,X_n\}$.

1. **Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N},\mathbf{E}(C_n)\leqslant k+n\mathbf{P}(X_1\geqslant k)$.**
2. **En déduire que $\mathbf{E}(C_n)=o(n)$ quand $n\to+\infty$.**

   Dans la suite, on suppose que les X_k sont d'espérance finie.
3. **Montrer que $\mathbf{P}(X_1\geqslant k)=o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ quand $k\to+\infty$.**
4. **En déduire que $\mathbf{E}(C_n)=o(\sqrt{n})$ quand $n\to+\infty$.**

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. On a $C_n=\mathrm{card}(\{X_1,...,X_n\}\cap[0,k[)+\mathrm{card}(\{X_1,...,X_n\}\cap[k,+\infty[)$ et donc

$$C_n\leq k+\sum_{i=1}^n\mathbf{1}_{[k,+\infty[}(X_i)$$

   Par croissance de l'espérance, $E(C_n)\leq k+\sum_{i=1}^n P(X_i\geq k)$ et finalement

$$E(C_n)\leq k+nP(X_1\geq k)$$

2. Soit $\varepsilon>0$. On sait que lorsque $k\to+\infty$, $P(X_1\geq k)\to 0$: il existe donc $K\in\mathbb{N}$ tel que $P(X_i\geq K)\leq\varepsilon$. De plus, $\dfrac{K}{n}\to 0$ lorsque $n\to+\infty$ donc il existe N tel que si $n\geq N$, $\dfrac{K}{n}\leq\varepsilon$.

   Finalement, si $n\geq N$, alors $\dfrac{E(C_n)}{n}\leq 2\varepsilon$.

   Cela montre que $\dfrac{E(C_n)}{n}\to 0$ lorsque $n\to+\infty$ et ainsi que $E(C_n)=o(n)$.

3. On a $E(X_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 \geq i) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{P(X \geq i)}_{\geq P(X_1 \geq k)} + \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_1 \geq i)$. Ainsi, $0 \leq kP(X_1 \geq k) \leq E(X_1) - \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_1 \geq i)$ qui tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$. On a bien montré que $P(X_1 \geq k) = o\left(\frac{1}{k}\right)$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe K tel que si $k \geq K$, $kP(X_1 \geq k) \leq \varepsilon$. Ainsi, d'après la question 1, si $k \geq K$, on a $E(C_n) \leq k + \frac{n\varepsilon}{k}$.

   Or, $f : x > 0 \mapsto x + \frac{n\varepsilon}{x}$ est dérivable et, par étude des variations, elle est minimale en $\sqrt{n\varepsilon}$.

   Prenons n tel que $\sqrt{n\varepsilon} \geq K$. Alors, comme pour tout $k \geq K$, $E(C_n) \leq f(k)$, on a $E(C_n) \leq \min_{[K,+\infty[} f(k)$ i.e. $E(C_n) \leq f(\sqrt{n\varepsilon})$ i.e. $E(C_n) \leq 2\sqrt{n\varepsilon}$.

   Ainsi, $E(C_n) = o(\sqrt{n})$.

7.46 Exercice CCINP 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)\mathrm{ch}(x)$.

1. **Sans le calculer, justifier l'existence du développement en série entière de f en 0. Donner son rayon de convergence.**
2. **On note $\sum a_n x^n$ ce développement. Calculer a_0 et montrer que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.**
3. **Calculer $f^{(4)}$ et en déduire une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 vérifiée par f.**
4. **Trouver une relation de récurrence sur les a_n.**

1. cos et ch sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, donc par produit de Cauchy, f est développable sur $\mathbb{R}$. Le rayon de convergence du développement en série entière est donc $+\infty$.
2. $a_0 = f(0) = 1$.
   f est paire, donc $a_1 = a_3 = 0$.
   Le développement limité en 0 de cos est $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ et celui de ch est $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$. On a donc celui de f qui est $f(x) = 1 + O(x^4)$. Comme la partie polynomiale de ce développement limité est donnée par le développement en série entière tronqué au degré 3 (Taylor-Young), on (re)trouve $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
3. On trouve $f^{(4)} = -4f$.
4. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4}x^n.$$

   L'équation différentielle se traduit donc, par unicité du développement en série entière, par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+4} = \frac{-4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} a_n.$$

   On montre alors par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_{4n} = \frac{(-4)^n}{(4n)!}, \quad a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0.$$

7.47 Exercice CCINP 2

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. **Quel est le domaine de définition D de F ?**
2. **Calculer $F(1)$ en posant $u = \frac{1}{t}$.**

3. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in D$.

1. F est paire, on restreint donc son étude à $\mathbb{R}_+$.
   Pour $x=0$, $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ et elle y est de signe constant, donc $F(0)$ n'est pas défini.
   Pour $x>0$, $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est négligeable en 0 devant $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable sur $]0,1]$ et elle est négligeable en $+\infty$ devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   $D = \mathbb{R}^*$.
2. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ sachant que $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient
$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{1}{u^2} du = -F(1).$$
   Finalement, $F(1) = 0$.
3. Il suffit d'expliciter F sur $\mathbb{R}_+^*$. On complètera ensuite par parité.
   Soit $x>0$. On a
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} \frac{1}{x} dt.$$
   On effectue le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$. On a alors
$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{1+u^2} du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du + \frac{\ln(x)}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du.$$
$$F(x) = \frac{1}{x} F(1) + \frac{\ln(x)}{x} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ln(x)}{2x}.$$
   Finalement, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \dfrac{\pi \ln(|x|)}{2|x|}$.

7.48 Exercice CCINP 3

Soit u un endomorphisme symétrique dans une espace euclidien.

1. **Montrer que $\mathbf{Im}(u) \subset \mathbf{Ker}(u)^{\perp}$ et ensuite que $\mathbf{Im}(u) = \mathbf{Ker}(u)^{\perp}$.**
2. **On pose**
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
   On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.
   (a) **Trouver une base de l'image et du noyau de f.**
   (b) **Trouver la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, du projecteur orthogonal sur $\mathbf{Im}(f)$.**

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$. Alors
$$\langle y, x \rangle = \langle u(z), x \rangle = \langle z, u(x) \rangle = \langle z, 0 \rangle = 0.$$
   On a bien $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)^{\perp}$.
   On conclut à l'égalité car on a égalité des dimensions (théorème du rang).

2. (a) On remarque que M est de rang 2 (les deux première colonnes sont indépendantes et les $n-1$ dernières sont égales). $((0,1,\ldots,1),(1,0,\ldots,0))$ est une base de l'image de f.
Le noyau de f est de dimension $n-2$ or clairement,
$((0,1,-1,0,\ldots,0),(0,1,0,-1,\ldots,0),\cdots,(0,1,0,\ldots,0,-1))$ est une famille libre de $n-2$ vecteurs du noyau : c'en est donc une base.
M étant symétrique et la base canonique étant orthonormée pour le produit scalaire canonique, f est un endomorphisme symétrique pour $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Ce qui précède permet de dire que le noyau de f est l'orthogonal de son image, ce qui est cohérent avec les bases trouvées.

(b) On note p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Posons $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}(0,1,\ldots,1)$ et $e_2 = (1,0,\ldots,0)$. (e_1,e_2) est une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$. Soit $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$p(x) = \frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1}(0,1,\ldots,1) + x_1(1,0,\ldots,0) = (x_1, \frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1},\ldots,\frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1}).$$

On en déduit que la matrice représentative de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

7.49 Exercice CCINP 4

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E et $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de vecteurs propres de u.

1. **Démontrer, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, que $P(u)=0$ où P est le polynôme caractéristique de u.**
2. **Soit $x\in E$. On écrit $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x))$.**
3. **Démontrer que les valeurs propres de u sont simples si et seulement s'il existe $x\in E$ tel que $(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x))$ soit une base de E.**

1. Notons $D=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}$.
$P=\chi_D=\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$. La matrice représentative de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$ est $P(D)$.
Or $P(D)=\mathrm{Diag}(P(\lambda_1),\ldots,P(\lambda_n))=0$, d'où $P(u)=0$.

2. Pour $l=1\cdots n$, $u^l(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k\lambda_k^l e_k$, donc

$$\det_{\mathcal{B}}(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x)) = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}x_n \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

avec $V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ le déterminant de Vandermonde associé aux λ_i.

3. Supposons que les valeurs propres de u soient deux à deux distinctes, alors $V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\neq 0$. On choisit $x=\sum_{k=1}^{n} e_k$, alors avec la question précédente,
$\det_{\mathcal{B}}(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x)) = V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\neq 0$ et donc $(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x))$ est une base de E.
Réciproquement, supposons qu'il existe $x\in E$ tel que $(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Alors $\det_{\mathcal{B}}(x,u(x),\ldots,u^{n-1}(x$
0 et donc $V(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\neq 0$: les λ_k sont bien deux à deux distinctes.

7.50 Exercice CCINP 5

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose $N : E \to \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,dt}$. On note aussi $\|.\|_\infty$, $f \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On sait que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

1. **Montrer que N est une norme issue d'un produit scalaire à préciser.**
2. **N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?**
3. **Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.**
   On pourra utiliser que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$.

1. On définie $\varphi : (f,g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Montrons que φ est un produit scalaire sur E.
   φ est clairement symétrique.
   φ est linéaire suivant sa deuxième variable par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.
   φ est positive par positivité de l'intégrale.
   Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f,f) = 0$. Alors $f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,dt = 0$. Une somme de termes positifs est nulle seulement si tous ses termes sont nuls, donc $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2\,dt = 0$. Mais f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$, donc si son intégrale est nulle, alors $f' = 0$. Donc f est constante sur $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, alors $f = 0$.
   On a montré que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire. N est bien la norme issue de ce produit scalaire.
2. Supposons que N et $\|.\|_\infty$ soient équivalentes. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $f \in E$, $N(f) \leq \alpha\|f\|_\infty$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto t^n$. Alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f) = \sqrt{\frac{n^2}{2n-1}}$. On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sqrt{\frac{n^2}{2n-1}} \leq \alpha$$
   ce qui est absurde puisque le membre de gauche diverge vers $+\infty$.
3. Soit $f \in E$. Soit $x \in [0,1]$. On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Par inégalité triangulaire,
   $$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$$
   Pour a et b réels, on a $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. On en déduit que
   $$|f(x)|^2 \leq 2\left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|dt\right)^2\right).$$
   Par inégalité de Cauchy-Schwarz,
   $$|f(x)|^2 \leq 2\left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2dt \int_0^1 1^2dt\right)$$
   ou encore
   $$|f(x)|^2 \leq 2N(f)^2 \quad i.e. \quad |f(x)| \leq \sqrt{2}N(f).$$
   On passe à la borne supérieure pour $x \in [0,1]$ et on obtient bien $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.

7.51 Exercice CCINP 6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$. On suppose que $A^T = -A$.

1. **Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.**

2. **Montrer que $\det(A) = 0$ et que le spectre de f est $\{0\}$.**
3. **Montrer que $I_{2n+1} - A$ et $I_{2n+1} + A$ sont inversibles.**
4. **Montrer que $B = (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1}$ est orthogonale et que $\det(B) = 1$.**

1. On note $A = (a_{i,j})$, $\mathcal{B}(e_i)_{1\leq i\leq 2n+1}$, $x = \sum_{i=1}^{2n+1} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{2n+1} y_j e_j$. On a alors

$$\langle f(x), y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2n+1} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{2n+1} y_j e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2n+1} x_i \sum_{k=1}^{2n+1} a_{k,i} e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} x_i y_j a_{j,i}$$

par antisymétrie de A

$$\langle f(x), y\rangle = -\sum_{i=1}^{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} x_i y_j a_{i,j} = -\langle x, f(y)\rangle.$$

2. $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det(A) = -\det(A)$. On a bien $\det(A) = 0$.
   0 est donc valeur propre de A et de f.
   Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $x \neq 0$, tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors

$$\langle f(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2 = -\langle x, f(x)\rangle = -\lambda\|x\|^2.$$

   Comme $\|x\|^2 \neq 0$, alors $\lambda = 0$.
   On a bien montré que le spectre de f est réduit à $\{0\}$.
3. -1 et 1 ne sont pas valeur propre de A (donc $I_{2n+1} - A$ et $I_{2n+1} + A$ sont injectives, donc bijectives).
4. On a $B^T = (I_{2n+1} - A)^{-1}(I_{2n+1} + A)$ et $B^{-1} = (I_{2n+1} + A)(I_{2n+1} - A)^{-1}$. Mais $(I_{2n+1} - A)$ commute avec A, donc avec $I_{2n+1} + A$, et son inverse aussi et donc $B^T = B^{-1}$: B est orthogonale.
   Le déterminant de A est donc 1 ou -1.
   $\det(B) = \dfrac{\det(I_{2n+1} - A)}{\det(I_{2n+1} + A)}$. $\det(B)$ est du même signe que $\det(I_{2n+1} - A)\det(I_{2n+1} + A)$, i.e. que $\det(I_{2n+1} - A^2)$.
   Or A^2 est symétrique réelle, donc diagonalisable par le théorème spectral. Par ailleurs, si λ est une valeur propre de A^2, il existe $X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, tel que $A^2 X = \lambda X$. On a alors (avec les notations naturelles)

$$\lambda\|x\|^2 = \langle x, \lambda x\rangle = \langle x, f^2(x)\rangle = -\langle f(x), f(x)\rangle = -\|f(x)\|^2.$$

   Comme $\|x\|^2 > 0$, on a $\lambda \leq 0$. Si on note $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+1})$ une matrice diagonale semblable à A, alors tous les λ_k sont négatifs et comme $I_{2n+1} - A^2$ est semblable à $\mathrm{Diag}(1 - \lambda_1, \ldots, 1 - \lambda_{2n+1})$, le déterminant de $I_n - A^2$ est $\prod_{k=1}^{2n+1} (1 - \lambda_k) \geq 0$.
   On a bien montré que $\det(B) \geq 0$ et donc $\det(B) = 1$.

7.52 Exercice CCINP 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**.**

1. **Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.**
2. **On pose** $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**
   (a) **Déterminer $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid DM = MD\}$.**
   (b) **Déterminer $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.**
   (c) **Montrer que $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ est strictement inclus dans $\mathcal{C}(A)$.**

1. On trouve $\chi_A = X^2(X+1)$. Le spectre de A est donc $\{-1, 0\}$.
   On remarque que le rang de A est 1, donc son noyau, i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, est de dimension 2 (théorème du rang). On en déduit que A est diagonalisable. Il existe donc P inversible de taille 3 telle que $A = PDP^{-1}$. On peut choisir $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (non demandé a priori).

2. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
   $DM = MD$ si et seulement si $c = f = g = h = 0$. Donc

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D) \end{aligned}$$

   Finalement

$$\mathcal{C}(A) = P\mathcal{C}(D)P^{-1}.$$

   (c) $\mathcal{C}(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 5. $M \mapsto PMP^{-1}$ étant un isomorphisme de $\mathcal{C}(D)$ sur $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 5.
   Or, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ et donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{2k} = A^2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $A^{2k+1} = A$. On en déduit que $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$ est de dimension au plus 3 et donc ne peut pas être égal à $\mathcal{C}(A)$ qui est de dimension 5. Comme on a toujours
   $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big) \subset \mathcal{C}(A)$, cette inclusion est bien stricte.

7.53 Exercice CCINP 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien. Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1. **Soit p un entier impair.**
   (a) **Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v de E tel que $v^p = u$.**
   (b) **Montrer que v admet les mêmes sous-espaces propres que u et que v et u ont le même nombre de valeurs propres.**
   (c) **Montrer que v est unique.**
2. **Cette fois-ci p est pair. Les conclusions de la question précédente sont-elles conservées ?**

1. (a) Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$, constituée de vecteurs propres de u. On écrit, pour $i = 1 \cdots n$, $u(e_i) = \lambda e_i$.
   $t \mapsto t^p$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $i = 1 \cdots n$, il existe donc $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_i^p = \lambda_i$.
   On sait qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour $i = 1 \cdots n$, $v(e_i) = \mu_i e_i$. Cet endomorphisme est symétrique puisque sa matrice représentative dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique (elle est diagonale).
   Par ailleurs, pour $i = 1 \cdots n$, $v^p(e_i) = u(e_i)$ et donc, par linéarité, $v^p = u$.
   (b) Soit ν une valeur propre de v. Soit $x \in E_\nu(v)$. Alors, $v(x) = \nu x$ et donc $v^p(x) = \nu^p x = u(x)$. Donc $x \in E_{\nu^p}(u)$.
   On a montré que $E_\nu(v) \subset E_{\nu^p}(u)$. Donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_{\nu_i}(v) \subset E_{\nu_1^p}(u) + \cdots + E_{\nu_q^p}(u) \subset E.$$

   Et donc les inclusions sont toutes des égalités : pour $i = 1 \cdots q$, $E_{\nu_i}(v) = E_{\nu_i^p}(u)$.
   Et les ν_i atteignent toutes les valeurs propres de u, sinon, il resterait un sous-espace propre de u alors que la somme de tous ceux trouvés recouvre déjà E.
   Enfin, $t \mapsto t^p$ étant bijective, il y a autant de ν_i que de ν_i^p : u et v ont le même nombre de valeurs propres.

(c) Soient v_1 et v_2 deux endomorphismes symétriques de E tels que $v_1^p = v_2^p = u$.
v_1^p et v_2^p sont identiques sur un sous-espace propre de u, qui est aussi un sous-espaces propre de v_1 et de v_2. En notant λ, μ et ν les valeurs propres respectives, on a pour x dans ce sous-espace propre, $u(x) = \lambda x = \mu^p x = \nu^p x$. Pour $x \neq 0$, $\mu^p = \nu^p$ et donc (p impair), $\mu = \nu$, d'où $v_1(x) = v_2(x)$. Comme les sous-espaces propres de u recouvrent E, finalement, $v_1 = v_2$.

2. Si p est pair, v n'existe pas forcément. Prenons $u = -\mathrm{Id}_E$. On ne peut pas trouvé de v symétrique tel que $v^2 = -\mathrm{Id}_E$. Sinon, en diagonalisant v avec le théorème spectral, on aurait dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ adaptée à v, pour $i = 1 \cdots n$, $v(e_i) = \mu_i e_i$ et alors $v^2(e_i) = \mu_i^2 e_i = u(e_i) = -e_i$ et donc $\mu_i^2 = -1$, ce qui n'est pas possible.

7.54 Exercice CCINP 9

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient f, u, v des endomorphismes de E. On suppose qu'il existe λ et μ réels tels que

$$f = \lambda u + \mu v, \quad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v \quad \textbf{et} \quad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v.$$

1. **Donner des caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable utilisant des polynômes.**
2. **Montrer que f est diagonalisable.**
3. **Montrer que u et v sont diagonalisables dans une base commune lorsque λ, μ et 0 sont deux à deux distincts.**

1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.
2. On vérifie que $f^3 - (\lambda + \mu) f^2 + \lambda\mu f = 0$. Donc $P = X^3 - (\lambda + \mu) X^2 + \lambda\mu X$ est un polynôme annulateur de f. Or $P = X(X - \lambda)(X - \mu)$.
Si λ, μ et 0 sont deux à deux distincts, P est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$. Alors, $f = \mu v$, $f^2 = \mu^2 v$ donnent $f^2 - \mu f = 0$ et donc $X(X - \mu)$ annule f et est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
De même si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$.
Si $\lambda = \mu \neq 0$. Alors $f = \lambda(u + v)$, $f^2 = \lambda^2(u + v)$ donnent $f^2 - \lambda f = 0$ et donc $X(X - \lambda)$ annule f et est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
Si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0$ et f est diagonalisable.
Dans tous les cas, f est diagonalisable.
3. On peut écrire $v = \dfrac{1}{\mu(\mu - \lambda)}(f^2 - \lambda f)$ et $u = \dfrac{1}{\lambda(\lambda - \mu)}(f^2 - \mu f)$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale. Alors celle de f^2 l'est aussi et par linéarité, celles de u et de v aussi : u et v sont bien diagonalisables dans une même base.